PARAQITJET E GJYSMËGRUPEVE TË RENDITUR DHE DISA KONDITA FUNDSHMËRIE

***AIDA SHASIVARI.[1], ELTON PASKU.[2]**

[1]Universiteti Politeknik i Tiranës, Fakulteti i Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike, Departamenti i Matematikës

[2]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

e-mail: aida.shasivari@yahoo.com

Përmbledhje

Në këtë artikull përkufizohen për herë të parë paraqitjet e $\vee$-gjysmëgrupeve në terma të përftuesve dhe relacioneve dhe jepet një konditë fundshmërie për sistemin e reduktimit që i shoqërohet një paraqitjeje të dhënë. Gjithashtu tregohet se tek çdo *po*-gjysmëgrup S me përftim të fundëm që kënaq konditën e minimalitetit për bi-idealet e renditur çdo kongruencë $\boldsymbol{K}$ që përmban relacionin $\boldsymbol{B}$ është me indeks të fundëm. Prej kësaj janë deduktuar dy rrjedhime që kanë të bëjnë me zbërthyeshmërinë e *po*-gjysmëgrupeve si semilatisa *po*-gjysmëgrupesh $\boldsymbol{B}$ -të thjeshtë.

Fjalëkyçe:$\vee$-gjysmëgrup, *po*-gjysmëgrup, paraqitje, sistem reduktimi, indeks i fundëm, me përftim të fundëm, zbërthim semilatise.

Abstract

In this paper it is defined for the first time the concept of a presentation for a $\vee$-semigroup in terms of generators and relations and it is given a finiteness condition for the reduction system associated with any given presentation. Also it is shown that in any finitely generated *po*-semigroup S which satisfies the minimal condition on principal bi-ideals, any congruence $\boldsymbol{K}$ that contains the relation $\boldsymbol{B}$ is of finite index in S. We deduce from this two corollaries regarding the decompositions of *po*-semigroups as semilattices of $\boldsymbol{B}$ -simple po-semigroups.

Key words: $\vee$-semigroup, *po*-semigroup, presentation, reduction system, finite index, finitely generated, semilattice decomposition.

1 Hyrje

Në rastin e paraqitjeve të gjysmëgrupeve të zakonshëm veprohet duke thyer një gjysmëgrup të lirë $F(X)$ mbi X për kongruencën $R^{\#}$ të përftuar nga një bashkësi relacionesh R që për saktësi është një bashkësi çiftesh nga $F(X)\times F(X)$. Atëherë gjysmëgrupi faktor $F(X)/R^{\#}$ do të thuhet se ka paraqitje $(X:R)$ ku X është bashkësia e përftuesve dhe R ajo e relacioneve ose relatorëve. Kjo përqasje dështon në rastin e gjysmëgrupeve të renditur sepse në përgjithesi faktori i një gjysmegrupi të renditur sipas një kongruence nuk është më një *po*-gjysmëgrup. Konstatimi i parë i kësaj anomalie është bërë nga (Kehayopulu & Tsingelis, 1995/1). Më tej të njëjtët autorë kanë studiuar të ashtëquajturat pseudo-renditje tek *po*-gjysmëgrupet të cilat per fat të keq nuk lejojnë përkufizimin e paraqitjeve të fundme pasi bashkësia e relacioneve që përbëjnë pseudo-renditjen është e pafundme. Gjithashtu kongruencat e rregullta dhe fortësisht të rregullta të studiuara nga (Xie Xiang-Yun. 2000) nuk janë të përshtatshme për përkufizimin e paraqitjeve të *po*-gjysmëgrupeve pasi ato janë ngushtësisht të lidhura me pseudo-renditjet e (Kehayopulu & Tsingelis, 1995/1). Është provuar në fakt se ρ është kongruencë e rregullt në një *po*-gjysmëgrup vetëm në qoftë se ekziston një pseudo-renditje σ e tillë që $\rho = \sigma \cap \sigma^{-1}$. Edhe rezultatet e mëtejshme të (Xie Xiang-Yun. 2008) janë në të njëjtën linjë me ato të (Xie Xiang-Yun. 2000). Për këto arsye në vendosëm të ndjekim një përqasje tjetër. Përpara se të shpjegojmë rrugën që do të ndjekim, do të paraqesim këtu një version tjetër të zhytjes së dhënë tek (Kehayopulu, *et.al*. 2006) të një *po*-gjysmëgrupi tek një *le*-gjysmëgrup i plotë dhe distributiv. Në qoftë se $(S,\cdot,\leq)$ është një *po*-gjysmëgrup që ka element më të vogël i cili është njëkohësisht edhe zero e shumëzimit, quajmë $\Phi^{\downarrow}(S)$ nënbashkësinë e $\Pi^{\downarrow}(S)$ që ka për elementë bashkësitë e poshtme $(A]$ ku $A \subseteq S$ është bashkësi e fundme. Lidhur me veprimin $\circ$ të shumëzimit të përcaktuar tek (Kehayopulu, *et.al*, 2006), $\Phi^{\downarrow}(S)$ formon nëngjysmëgrup të $\Pi^{\downarrow}(S)$. Ky nëngysmëgrup është *po*-gjysmëgrup lidhur me përfshirjen dhe për të kemi ekzistencën e superiorëve të fundëm. Konkretisht, për çdo familje të fundme $(A_i] \in \Phi^{\downarrow}(S)$ ku $i \in I$ dhe I e fundme, nga (Kehayopulu, *et.al*, 2006) shihet se $\vee_{i\in I}(A_i] = (\cup_{i\in I} A_i]$ dhe meqënëse secila prej A_i-ve është e fundme, atëherë $(\cup_{i\in I} A_i] \in \Phi^{\downarrow}(S)$. Ndërkaq është e qartë që $\iota(S) \subseteq \Phi^{\downarrow}(S)$ ku ι është zhytja e përcaktuar tek (Kehayopulu, *et.al*, 2006). Pra përfundimisht mund të themi se çdo *po*-gjysmëgrup S zhytet tek $\vee$-gjysmëgrupi $\Phi^{\downarrow}(S)$ i bashkësive të fundme të poshtme.

2 Paraqitjet e ∨-gjysmëgrupeve dhe përfundueshmëria e tyre

Le të supozojmë se $(X,\leq)$ është një bashkësi e renditur dhe $(F(X),\cdot,\leq)$ *po*-gjysmëgrupi i lirë me bazë $(X,\leq)$ i ndërtuar tek (Pin, & Weil, 2002). Tek (Shasivari, A., Pasku, E. (2017)) është ndërtuar $\vee$-gjysmëgrupi i plotë nga sipër i lirë $(\Pi^{\downarrow}(F(X)),\circ,\subseteq)$ me bazë bashkësinë e renditur të dhënë $(X,\leq)$. Elementët e këtij $\vee$-gjysmëgrupi janë bashkësitë e poshtme $(A]$, renditja është përfshirja dhe shumëzimi është dhënë me anën e barazimit $(A]\circ(B] = (AB]$. Në qoftë se në vend të $\Pi^{\downarrow}(F(X))$ marrim nën $\vee$-gjysmëgrupin $\Phi^{\downarrow}(F(X))$ të përcaktuar më sipër, atëherë $\Phi^{\downarrow}(F(X))$ nuk është më $\vee$ i plotë siç ishte $\Pi^{\downarrow}(F(X))$ por për të ekzistojnë superiorët e fundëm. Gjithashtu $\Phi^{\downarrow}(F(X))$ është i lirë me bazë $(X,\leq)$ në kategorinë me objekte *po*-gjysmëgrupet distributivë tek të cilët ekzistojnë superiorët e fundëm dhe morfizma homomorfizmat që ruajnë superiorët e fundëm. E mira e $\Phi^{\downarrow}(F(X))$ është që lidhur me $\circ$ dhe $\vee$ formon një Ω-algjebër $(\Phi^{\downarrow}(F(X)),\circ,\vee)$ dhe siç dihet nga Teorema 3.5 e (Cohn, 1965) faktori A/ρ i një Ω-algjebre A për një kongruencë ρ çfardo në A jep përsëri një Ω-algjebër të të njëjtit lloj me A. Ekziston një rezultat tek (Cohn, 1965) analog me atë të Pohimit 1.5.8 tek (Howie, 1995) që përshkruan kongruencën $R^{\#}$ të përftuar nga një bashkësi relacionesh në një gjysmëgrup S. Rezultati në fjalë është Teorema 6.2 e cila pohon se bashkësia $\mathbf{X}_{\Omega}(A)$ e të gjithë kongruencave në një Ω-algjebër A është një sistem algjebrik i mbyllur që do të thotë se $\mathbf{X}_{\Omega}(A)$ përputhet me $\mathbf{B}_{\Gamma}(A^2)$ ku Γ është një fushë operatorësh në A^2 dhe $\mathbf{B}_{\Gamma}(A^2)$ është bashkësia e të gjithë nën Γ-algjebrave të A^2 lidhur me operatorët Γ. Më poshtë do të tregojmë me hollësi se si përdoret ky rezultat për të gjetur se kush është kongruenca më e vogël në një Ω-algjebër A që përmban një bashkësi të dhënë R. Më pas do ta përdorim këtë përshkrim të adaptuar për rastin e $(\Phi^{\downarrow}(F(X)),\circ,\vee)$

Për të vërtetuar barazimin $\mathbf{X}_{\Omega}(A)=\mathbf{B}_{\Gamma}(A^2)$ tek teorema 6.2 e (Cohn, P.M. (1965))duhet përcaktuar Γ në mënyrë të përshtatshme. Për këtë janë përcaktuar këto operatorë

(i) Për çdo $a\in A$ një veprim 0-or $\lambda=\lambda(a)$ i tillë që $\lambda=(a,a)$;

(ii) Një operator 1-or μ i tille që $\mu(x,y)=(y,x)$;

(iii) Një operator 2-or ν i tillë që

$$\nu((x,y),(z,t))=(x,t) \text{ në qoftë se } y=z \text{ dhe } (x,y) \text{ përndryshe.}$$

(iv) Për çdo $\omega\in\Omega(n+1)$ ku $n\geq 0$, për çdo n-she $(a_1,\dots,a_n)$ nga A dhe për çdo $i=1,\dots,n+1$, është përcaktuar një operator 1-or $\rho=\rho(\omega,a_1,\dots,a_n,i)$ i tillë që

$$\rho(x,y)=(\omega(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_i,\dots,a_n),\omega(a_1,\dots,a_{i-1},y,a_i,\dots,a_n)).$$

Është e qartë se një kongruencë në A nuk është gjë tjetër veçse një nën-algjebër e $A\times A$ lidhur me operatorët Γ, pra një element i $\mathbf{B}_{\Gamma}(A^2)$. Kjo sjell që për çdo bashkësi R relacionesh në A, domethënë për çdo nënbashkësi të $A\times A$, kongruenca në A e përftuar nga R është prerja e të gjithë nënalgjebrave të $\mathbf{B}_{\Gamma}(A^2)$ që përmbajnë R-në. Rrjedhimisht, për të përftuar kongruencën në fjalë, në fillim ndërtojmë bashkësinë R^c që është bashkimi i të gjitha $\rho(x,y)$ ku $(x,y)\in R$, $\omega\in\Omega(n+1)$, $n\geq 0$, dhe $(a_1,,,a_n)$ një n-she çfardo nga A. Pastaj aplikojmë mbi çdo element të R^c së ndërtuar opëratorët λ, μ dhe ν duke përftuar kështu një bashkësi të re $(R^c)^e$ që është ekuivalenca e përftuar nga R^c. Nga përkufizimi i kongruencës kemi që $(R^c)^e = R^\#$. Ky rezultat është analogu i atij të ndërtimit të kongruencave tek (Howie, J. M.. (1995)).

Le të jetë tani $(S,\cdot,\leq)$ një $\vee$-gjysmëgrup. Do të themi se çifti $((X,\leq),R)$ është një paraqitje e $(S,\cdot,\leq)$ në qoftë se $(X,\leq)$ është një bashkësi e renditur, R është një nënbashkësi e $\mathbf{\Phi}^{\downarrow}(F(X))^2$ dhe $S\cong\mathbf{\Phi}^{\downarrow}(F(X))/R^\#$. Në qoftë se X është i fundëm atëherë do të themi se S është me përftim të fundëm, dhe në qoftë se për më tepër R është e fundme, do të themi se S është me paraqitje të fundme.

Skema e përgjithshme e përshkruar më lart për ndërtimin e kongruencës së përftuar nga një relacion i dhënë në një Ω-algjebër çfardo, mund të adaptohet lehtësisht në rastin e $\mathbf{\Phi}^{\downarrow}(F(X))$ të konsideruar si Ω-algjebër me dy veprime, $\circ$ dhe $\vee$. Fillimisht, për çdo relacion $([U],[V])$ nga R-ja, krijojmë dy bashkësi,

$$\{([W_1]\circ[U]\circ[W_2],[W_1]\circ[V]\circ[W_2]) \mid [W_1],[W_2]\in\mathbf{\Phi}^{\downarrow}(F(X))\}$$

dhe

$$\{([W_1]\vee[U]\vee[W_2],[W_1]\vee[V]\vee[W_2]) \mid [W_1],[W_2]\in\mathbf{\Phi}^{\downarrow}(F(X))\},$$

e më pas marrim bashkimin e bashkësive të tilla të ndërtuara për të gjitha çiftet $([U],[V])$ nga R-ja, bashkim i cili jep R^c, dhe më pas merret ekuivalenca e përftuar nga kjo e fundit.

Lidhur me kongruencën e përcaktuar nga R mund të percaktojmë një sistem reduktimi $(\Sigma,\rightarrow)$ ku $\Sigma=\mathbf{\Phi}^{\downarrow}(F(X))$ dhe derivimet një-hapëshe $\sigma_1\rightarrow\sigma_2$ janë dy llojesh:

$$\sigma_1=[W_1]\circ[U]\circ[W_2],\sigma_2=[W_1]\circ[V]\circ[W_2]\text{ dhe }([U],[V])\in R,$$

ose

$$\sigma_1=[W_1]\vee[U]\vee[W_2],\sigma_2=[W_1]\vee[V]\vee[W_2]\text{ dhe }([U],[V])\in R.$$

Në qoftë se R është një bashkësi zbritëse relacionesh në sensin që për çdo $([U],[V])\in R$ të kemi $\forall u\in U,\exists v\in V, u>v$, atëherë $\sigma_1\rightarrow\sigma_2$ sjell që $\sigma_1\subseteq\sigma_2$.

Një rast më i përgjithshëm paraqitjesh sesa ato me përftim të fundëm është ai kur bashkësia e renditur $(X,\leq)$ është Noteriane në sensin që në X nuk ekziston asnjë zinxhir zbritës i pafundëm. Për të tilla paraqitje ka vend lema e mëposhtme.

Lemë 2.1 *Nëqoftë se* $(X,\leq)$ *është një bashkësi e renditur Noteriane, atëherë bashkësia e renditur* $(F(X),\leq)$ *është gjithashtu Noteriane.*

Vërtetim. Do të vërtetojmë se çdo zinxhir

$$u \geq u_1 \geq u_2 \geq ... \tag{N.1}$$

në $F(X)$ përfundon. Vërtetimi do të bëhet me induksion sipas gjatësisë së u. Në rastin kur gjatësia është 1, atëherë fjalët u_k për $k \geq 1$ janë shkronja, rrjedhimisht nga fakti që $(X,\leq)$ është Noterian marrim se zinxhiri në fjalë në këtë rast përfundon. Supozojmë tani për induksion se pohimi vlen për fjalët me gjatësi n dhe duam ta provojmë për ato me gjatësi $n+1$. Kështu gjatësia e u është $n+1$. Le të jetë për çdo $k \geq 1$, x_{k_1} shkronja e parë e fjalës u_k dhe x shkronja e parë e fjalës u. Për këto shkronja kemi zinxhirin

$$x \geq x_{11} \geq x_{21} \geq ...$$

i cili nga supozimi për bashkësinë e renditur $(X,\leq)$ përfundon, të themi në y dhe kjo ndodh tek fjala u_n. Konsiderojmë tani zinxhirin

$$u' \geq u_1^{'} \geq u_2^{'} \geq ... \tag{N.2}$$

ku u' është përftuar nga u duke larguar x me të cilin fillon, ndërsa për $k = 1,...,n-1,$ $u_k^{'}$ është përftuar nga u_k duke larguar x_{k_1} me të cilën fillon dhe për $k \geq n,$ $u_k^{'}$ përftohet nga u_k duke larguar y me të cilin fillon. Mirëpo në këtë rast gjatësia e u' është n dhe atëherë nga supozimi induktiv do të kemi që zinxhiri (N.2) përfundon, le të themi tek $u_p^{'}$. Tani është e qartë që zinxhiri i dhënë (N.1) do të përfundojë tek fjala $u_p = yu_p^{'}$. ■

Rast me interes paraqitjesh është ai kur relacionet (U,V) të R-së janë të tilla që $U = \{u\}$ dhe $V = \{v\}$ ku $u,v \in F(X)$ të tilla që $u > v$. Për të parë nëse sistemi i reduktimit në raste si ky është Noterian ne mund të shmangim derivimet e llojit te dytë duke vepruar në këtë mënyrë. Shkruajmë $(A]$ në formën $\vee_{a\in A}(a]$, transformojmë secilën $(a]$ tek një e pareduktueshme $(a_0]$ dhe pastaj marrim $\vee_{a\in A}(a_0] = (\cup_{a\in A} a_0]$ e cila është vetë e pareduktueshme. Në rastin më të përgjithshëm të relacioneve zbritës çdo $(A]$ mund të reduktohet tek një $(B]$ e pareduktueshme modulo bashkësinë e derivimeve të llojit të dytë. Pra problemi i reduktimit te një element $(A]$ të dhënë tek një $(B]$ i pareduktueshëm sillet tek verifikimi për derivimet e llojit të parë. Teorema 2.2 që vijon konfirmon se çdo $(A]\in \boldsymbol{F}^{\downarrow}(F(X))$ është ekuivalent modulo R me një $(B]$ e cila është e pareduktueshme. E thënë ndryshe, sistemi $(\sum,\rightarrow)$ është Noterian.

Teoremë 2.2 *Në qoftë se bashkësia e renditur $(X,\leq)$ është Noteriane dhe R është një bashkësi zbritëse relacionesh, atëherë sistemi i reduktimit $(\sum,\rightarrow)$ është sistem Noterian.*

Vërtetim. Supozojmë se ekziston një zinxhir i pafundëm zbritës me derivime të llojit të parë

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1} \rightarrow \ldots \tag{N.3}$$

që i shkruar ndryshe do të ishte

$$(A_1] \rightarrow (A_2] \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n] \rightarrow (A_{n+1}] \rightarrow \ldots$$

Këtij zinxhiri i korrepsondon vargu jo-rritës i bashkësive të poshtme

$$(A_1] \supseteq (A_2] \supseteq \ldots \supseteq (A_n] \supseteq (A_{n+1}] \supseteq \ldots \tag{N.4}$$

Vëmë re nuk mund të ndodhë që ky varg zbritës të stabilizohet pas njëfare indeksi n, pasi po të ishte ashtu do të kishim nënvargun

$$(A_n] = (A_{n+1}] = \ldots$$

dhe ndërkaq këtij i korrespondon në krahun tjetër nënvargu rigorozisht zbritës

$$\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1} \rightarrow \ldots$$

Asnjë nga derivimet $\sigma_t \rightarrow \sigma_{t+1}$ më lart nuk mund të jetë i llojit të parë pasi në atë rast do të kishim që çdo element i A_{t+1} do të ishte rigorozisht poshtë një elementi të A_t e për pasojë $(A_{t+1}] \subset (A_t]$ përkundër barazimeve të supozuara më lart. Nga ana tjetër asnjë nga derivimet $\sigma_t \rightarrow \sigma_{t+1}$ nuk është i llojit të dytë pasi kjo do të binte ndesh me kushtin. Kështu mbetet që vargu (N.4) të mos stabilizohet askund. Në kushtet tona çdo derivim $(A_n] \rightarrow (A_{n+1}]$ tek (N.3) do të ishte i formës $(W_1 \cdot U \cdot W_2] \rightarrow (W_1 \cdot V \cdot W_2]$ ku për çdo $u \in U$ ekziston një $v \in V$ e tillë që $u > v$. Kjo do të thotë që çdo $\omega_1 u \omega_2 \in A_n$ ekziton një $\omega_1 v \omega_2 \in A_{n+1}$ e tillë që $\omega_1 u \omega_2 > \omega_1 v \omega_2$. Nga kjo rrjedh se mund të gjendet një zinxhir zbritës

$$a_1 > a_2 > \ldots \tag{N.5}$$

në $F(X)$ ku $a_i \in A_i$ për çdo $i \geq 1$. Por kjo kundërshton rezultatin e lemës 2.1 e për pasojë konkludojmë se (N.3) përfundon. ■

Një anomali që i bën sistemet e reduktimit jo Noteriane është ekzistenca e cikleve. Lema 2.2.5 e (Baader & Nopkow, 1998) pohon se çdo sistem reduktimi i cili është globalisht i fundëm dhe aciklik, është edhe Noterian. Kjo tregon se mungesa e cikleve së bashku me fundshmërinë globale do të sillnin përfundueshmërinë. Më tej do të shohim se me çfarë është ekuivalente mungesa e cikleve në terma të teorisë së gjysmëgrupeve.

Në tezën e tij të doktoratës (Pasku, 2006/1) Pasku i shoqëroi çdo sistemi reduktimi $(\Sigma, \to)$ një nënmonoid P të monoidit të plotë të transformimeve $\mathbf{T}(\Sigma)$ të bashkësisë Σ në mënyrën e mëposhtme:

$$P = \{\tau \in \mathsf{T}(\Sigma) : \tau(a) = b \text{ vetëm në qoftë se } b \text{ është pasardhës i } a \text{ ose } a = b\}.$$

Është e qartë që, lidhur me kompozimin e transformimeve, P formon një nënmonoid të $\mathbf{T}(\Sigma)$ i cili quhet monoidi i reduktimeve të $(\Sigma, \to)$. Qëllimi aty ka qënë studimi i sistemeve Noteriane dhe konfluente me mjete të teorisë së gjysmëgrupeve. Siç e thamë më lart, këtu do të tentojmë të njëjtën gjë por lidhur me përfundueshmerinë.

Konsiderojmë koproduktin $P * P$ në kategorinë e monoidëve të P me veten e vet. Më tej, le të jetë $Z\Sigma$ grupi i lirë abelian me bazë Σ. Çdo $\tau \in P$ përcakton një endomorfizëm $[\tau] \in \mathrm{End}(Z\Sigma)$ të dhënë nga barazimi

$$[\tau](\sum_{i \in I} z_i a_i) = \sum_{i \in I} z_i \tau(a_i).$$

Në këtë mënyrë përcaktohet një homomorfizëm

$$\varphi : P \to \mathrm{End}(Z\Sigma) \text{ i tillë që } \tau \mapsto [\tau]$$

Ky homomorfizëm bën të mundur ekzistencën e produktit gjysëm të drejtë $Z\Sigma \times_{\varphi} P$.

Për çdo $a \in \Sigma$ përcaktojmë tani

$$\lambda_a : P \to Z\Sigma \times_{\varphi} P$$

të tillë që

$$\tau \mapsto (a - \tau(a), \tau).$$

Ky është homomorfizëm pasi për τ_1 dhe τ_2 nga P nga njëra anë kemi që

$$\lambda_a(\tau_2 \circ \tau_1) = (a - \tau_2(\tau_1(a)), \tau_2 \circ \tau_1),$$

dhe nga ana tjetër që

$$\begin{aligned}\lambda_a(\tau_2)\cdot\lambda_a(\tau_1) &= (a-\tau_2(a),\tau_2)\cdot(a-\tau_1(a),\tau_1)\\ &= (a-\tau_2(a)+[\tau_2](a-\tau_1(a)),\tau_2\circ\tau_1)\\ &= (a-\tau_2(a)+\tau_2(a)-\tau_2(\tau_1(a)),\tau_2\circ\tau_1)\\ &= (a-\tau_2(\tau_1(a)),\tau_2\circ\tau_1),\end{aligned}$$

që tregon barazimin $\lambda_a(\tau_2\circ\tau_1)=\lambda_a(\tau_2)\cdot\lambda_a(\tau_1)$.

Vetia universale e koprodukteve sjell ekzistencën e një homomorfizmi unik $\lambda: P*P\to \mathbb{Z}\Sigma\times_\varphi P$ i tillë që $\lambda\circ\iota=\lambda_a$ ku $\iota: P\to \mathbb{Z}\Sigma\times_\varphi P$ është injeksioni përkatës i koproduktit.

Pohim 2.3 *Sistemi* $(\Sigma,\to)$ *nuk përmban cikle atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo* $a\in\Sigma$, $\mathrm{im}(\lambda)\cap P=\varnothing$.

Vërtetim. Supozojmë se ekziston një element $\tau_1*\cdots*\tau_n$ i tillë që pasqyrohet me anën e λ tek $(0,\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)\in\mathbb{Z}\Sigma\times_\varphi P$. Atëherë do të kishim

$$\begin{aligned}(0,\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n) &= \lambda(\tau_1*\cdots*\tau_n)\\ &= (a-\tau_1(a),\tau_1)\cdots(a-\tau_n(a),\tau_n)\\ &= (a-(\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)(a),\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)\end{aligned}$$

prej nga marrim që $(\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)(a)=a$ ose ndryshe që tek a ekziston një cikël, pra një kontradiktë.

Anasjellas, nëse do të kishim një cikël në një element $a\in\Sigma$, atëherë do të gjendeshin $\tau_1,\ldots,\tau_n\in P$ të tilla që $(\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)(a)=a$. Në këto kushte do të kishim që

$$\begin{aligned}\lambda(\tau_1*\cdots*\tau_n) &= (a-\tau_1(a),\tau_1)\cdots(a-\tau_n(a),\tau_n)\\ &= (a-(\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)(a),\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)\\ &= (0,\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)\in P,\end{aligned}$$

në kundërshtim me supozimin. Atëherë mbetet që të mos ketë pasur një cikël në a. ■

3 Kongruencat me indeks të fundëm në *po*-gjysmëgrupe

Le të supozojmë se $(S,\cdot,\leq)$ është një *po*-gjysmëgrup i përftuar nga një bashkësi e renditur e fundme $(X,\leq)$. Shënojmë me $F(X)$ *po*-gjysmëgrupin e lirë me bazë

$(X,\leq)$. Elementët e $F(X)$ janë fjalët me gjatësi të fundme $(x_1,x_2,...,x_n)$ ku x_i-të janë shkronja të X-it dhe se shumëzimi i dy fjalëve të tilla $(x_1,x_2,...,x_n)$ dhe $(y_1,y_2,...,y_m)$ jepet me anën e bashkëngjitjes

$$(x_1,x_2,...,x_n)\cdot(y_1,y_2,...,y_m)=(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m).$$

Nga ana tjetër renditja nëbashkësinë e renditur $(X,\leq)$ indukton një renditje në gjysmëgrupin e lirë $F(X)$ që percaktohet si më poshtë

$$(x_1,x_2,...,x_n)\leq(y_1,y_2,...,y_m) \text{ vetëm kur } n=m \text{ dhe } x_i\leq y_i, \forall i=1,2,...,n.$$

Ekziston një epimorfizëm $\varphi:F(X)\to S$ që çdo fjale $(x_1,x_2,...,x_n)$ i vë në korrespondencë prodhimin $\varphi(x_1)\varphi(x_2)...\varphi(x_n)$ në S të elementëve $\varphi(x_1),\varphi(x_2),...,\varphi(x_n)$ që u korrespondojnë shkronjave $x_1,x_2,...,x_n$. Është e qartë që ky është një epimorfizëm gjysmëgrupesh që ruan renditjen. Gjithashtu në $F(X)$ mund të përcaktojmë një tjetër renditje e quajtur renditja gjatësi-leksikografike $\leq_{llex}$ e cila është kombinim i renditjes së dhënë më lart dhe asaj të përcaktuar nga krahasimi i gjatësive të fjalëve, domethënë

$$\begin{array}{l}(x_1,x_2,...,x_n)\leq_{llex}(y_1,y_2,...,y_m) \text{ vetëm kur } n<m,\\ \text{ose kur } n=m \text{ dhe } x_i\leq y_i \text{ për çdo } i=1,2,...,n.\end{array}$$

Për çdo $s\in S$ përcaktojmë bashkësinë

$$\Delta(s)=\{\omega\in\varphi^{-1}(s):\omega \text{ është element minimal lidhur me } \leq_{llex}\}.$$

Një mënyrë më eksplicite për të ndërtuar $\Delta(s)$ do të ishte që së pari, nga të gjithë parafytyrat në $F(X)$ të s-së të merreshin ato fjalë ω me gjatësi minimale dhe më pas për secilën ω të merreshin elementët minimalë të prerjes $(\omega]\cap\varphi^{-1}(s)$ lidhur me renditjen $\leq$ (sa herë që kjo prerje është jo-boshe). Bashkimi i bashkësive me elementë minimalë të gjetur në këtë mënyrë do të jepte pikërisht $\Delta(s)$. Këtu vërejme se proçesi i gjetjes së elementëve minimalë më të vegjël ose baraz me një fjalë të dhënë në $F(X)$ është një proçes i fundëm pasi $(X,\leq)$ është e fundme.

Rezultatet e mëposhtme janë analoge të atyre tek (Pasku, 2006/2) por në rastin kur gjysmëgrupi është edhe i renditur.

Le te jete tani $\boldsymbol{K}$ një kongruencë në S dhe $\boldsymbol{K}_s$ një $\boldsymbol{K}$ -klasë çfarëdo. Shënojmë me

$$M_S = \bigcup_{s' \in \boldsymbol{K}_s} \Delta(s')$$

Qartësisht M_S përmban të gjithë përfaqësuesit minimalë lidhur me $\leq_{llex}$ të elementëve $s' \in \boldsymbol{K}_S$. Do të tregojmë se bashkësia

$$M = \bigcup_{s \in S} M_S$$

e cila do të quhet bashkësia e përfaqësuesve minimalë të $\boldsymbol{K}$, është një bashkësi e mbyllur sipas faktorëve që nënkupton se çdo faktor i një fjale të *M* është përsëri fjalë e *M*-së. Vërtet, supozojmë ekziston një $\omega = u_1 v u_2 \in M$ e tillë që $v \in F(X) - M$. Kjo do të thotë se ekziston $v' \in \varphi^{-1}(\boldsymbol{K}_{\varphi(v)})$ e tillë që $v' <_{llex} v$.

Nga ana tjetër, meqënëse $(\varphi(v), \varphi(v')) \in \boldsymbol{K}$:

atëherë $(\varphi(u_1)\varphi(v)\varphi(u_2), \varphi(u_1)\varphi(v')\varphi(u_2)) \in \boldsymbol{K}$,

ose ndryshe që fjala $\omega' = u_1 v' u_2 \in \varphi^{-1}(\boldsymbol{K}_{\varphi(v)})$

Ndërkaq duket se $u_1 v' u_2 <_{llex} u_1 v u_2$ gjë që përbën kontradiktë.

Në qoftë se tani $I = F(X) - M \neq \varnothing$, atëherë *I* është ideal i *S*. Vërtet, sikur të ekzistonin $u \in I$ dhe $v \in F(X)$ të tillë që $uv \in M$ ose $vu \in M$, atëherë nga fakti që *M* është e mbyllur sipas faktorëve do të merrnim në secilin rast se $u \in M$ në kundërshtim me supozimin. Në këtë mënyrë ne kemi vërtetuar lemën e mëposhtme.

***Lemë* 3.1**. *Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një po-gjysmëgrup i përftuar nga një bashkësi e renditur e fundme $(X, \leq)$ dhe $\boldsymbol{K}$ një kongruencë në S e tillë që $F(X) - M \neq \varnothing$, ku M është bashkësia e përfaqësuesve minimalë të $\boldsymbol{K}$, atëherë $I = F(X) - M$ është ideal i po-gjysmëgrupit të lirë $F(X)$.*

Në lemën e mëposhtme do të shënojmë me Δ relacionin diagonal $\{(x, x) \mid x \in S\}$ në *S* dhe do të supozojmë se relacioni $\boldsymbol{B}$ është kongruencë semilatise e plotë.

Lemë 3.2.*Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një po-gjysmëgrup i përftuar nga një bashkësi e renditur e fundme $(X, \leq)$ dhe $\boldsymbol{K}$ një kongruencë në S dhe le të jetë M bashkësia e përfaqësuesve minimalë të $\boldsymbol{K}$. Në qoftë se $\boldsymbol{K}$ përmban relacionin $\boldsymbol{B}$, dhe $\boldsymbol{B} \neq \Delta$ ose $\boldsymbol{B} = \Delta$ por S kënaq $\min_{\boldsymbol{B}}$, atëherë $F(X) - M \neq \varnothing$.*

Vërtetim. Supozojmë së pari se $\boldsymbol{B} \neq \Delta$. Në qoftë se $(x, y) \in \boldsymbol{B}$, atëherë

$$(xSx \cup x] = (ySy \cup y],$$

dhe atëherë $x \leq y$, ose $x \leq ysy$ për ndonjë $s \in S$. Meqënëse $\boldsymbol{B}$ është kongruencë e plotë, sipas rastit do të kishim që ose $(x, xy) \in \boldsymbol{B}$, ose që $(x, xysy) \in \boldsymbol{B}$. Në secilin rast atëherë do të kishim ekzistencën e fjalëve të ndryshme në $F(X)$ sipas renditjes $\leq_{llex}$ që përfaqësojnë të njëjtin element në *S*. Meqënëse $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{K}$, do të kemi se $M \neq F(X)$.

Në rastin e dytë kur $\boldsymbol{B} = \Delta$ dhe *S* kënaq $\min_{\boldsymbol{B}}$ vërejmë së pari se

$$x \geq_{\boldsymbol{B}} x^2 \geq_{\boldsymbol{B}} x^3 \geq_{\boldsymbol{B}} \ldots \geq_{\boldsymbol{B}} x^n \geq_{\boldsymbol{B}} \ldots,$$

dhe supozimi për $\min_{\boldsymbol{B}}$ do të sillte ekzistencën e një $n \geq 1$ të tillë që $(x^n, x^{n+1}) \in \boldsymbol{B}$. Mirëpo $\boldsymbol{B} = \Delta$ prandaj $x^n = x^{n+1}$. Kjo e fundit implikon ekzistencën e dy fjalëve të ndryshme në $F(X)$ sipas renditjes $\leq_{llex}$ që përfaqësojnë të njëjtin element të *S*, rrjedhimisht $M \neq F(X)$. ■

Kujtojmë nga (De Luca, & Varricchio, 1999) se një fjalët me gjatësi të pafundme me shkronja nga një alfabet çfarëdo do të quhet uniformisht rekurente në qoftë se për çdo faktor të saj *u* ekziston një numër natyror k_u i tillë që çdo faktor i *t* me gjatësi k_u përmban të paktën një herë *u*-në si faktor të vetin.

Fjalët rekurente përdoren për të testuar nëse është i fundëm komplementi i një ideali *J* të një gjysmëgrupi të lirë A^* tek ky i fundit. Për më tepër kujtojmë rezultatin e mëposhtëm nga (De Luca, A & Varricchio, 1999).

Rrjedhim (Rrjedhimi 2.3.2 tek (De Luca, & Varricchio, 1999) *Le të jetë J një ideal i* A^*. *Në qoftë se për çdo fjalë uniformisht rekurente* $\omega \in A^{\omega}, F(\omega) \cap J \neq \emptyset$ *atëherë komplementi* $C = A^* - J$ *është i fundëm.*

Pohim 3.1. *Le të jetë* $(S, \cdot, \leq)$ *një po-gjysmëgrup me përftim të fundëm i cili kënaq* $\min_{\boldsymbol{B}}$. *Çdo kongruencë* $\boldsymbol{K}$ *në S që përmban* $\boldsymbol{B}$ *është me indeks të fundëm në S.*

Vërtetim. Nga lema 3.1 dhe ajo 3.2 jemi te sigurt se $M \neq F(X)$. Meqënëse *M* pritet me çdo $\varphi^{-1}(\boldsymbol{K}_s)$ ku $s \in S$, atëherë do të mjaftonte të vertetonim se $M = F(X) - I$ është e fundme. Për këtë do të përdorim përfundimin e rrjedhimit më sipër. Le të jetë ω një fjalë e pafundme me shkronja nga *X* dhe po shënojmë me $F(\omega)$ bashkësinë e të gjithë faktorëve të fundëm të saj. Duhet të tregojmë se

$F(\omega) \cap I \neq \varnothing$. Supozojmë se $\omega = a_1 a_2 \ldots$, është fjala rekurente e dhënë. Shënojmë me

$$B_0 = (\varphi(a_1))_b = (\varphi(a_1) S \varphi(a_1) \cup \varphi(a_1)],$$

bi-idealin kryesor në S të përftuar nga $\varphi(a_1)$. Meqenese ω është uniformisht rekurente, për faktorin a_1, gjendet $k_{a_1} \in \mathbb{N}$ e tillë që çdo faktor i ω me gjatësi k_{a_1} do ta ketë a_1 si faktor të vetin të paktën një herë. Po ta zbatojmë këtë për faktorin e ω që fillon me a_2, marrim ekzistencën e një $v_1 \in F(\omega)$ të tillë që $u_1 = a_1 v_1 a_1 \in F(\omega)$. Më tej shohim se

$$\begin{aligned} B_1 = (\varphi(u_1))_b &= (\varphi(a_1)\varphi(u_1)\varphi(a_1) S \varphi(a_1)\varphi(u_1)\varphi(a_1) \cup \varphi(a_1)\varphi(u_1)\varphi(a_1)] \\ &\subseteq (\varphi(a_1) S \varphi(a_1)] \subseteq B_0 \end{aligned}$$

Tani mund të përcaktojmë induktivisht një varg elementësh

$$a_1, u_1 = a_1 v_1 a_1, u_2 = u_1 v_2 u_1, \ldots, u_k = u_{k-1} v_k u_{k-1}, u_{k+1} = u_k v_{k+1} u_k, \ldots,$$

në mënyrë të tillë që $u_k \in F(\omega), \mathrm{k} \geq 1$ dhe

$$\varphi(a_1) \geq_{\boldsymbol{B}} \varphi(u_1) \geq_{\boldsymbol{B}} \varphi(u_2) \geq_{\boldsymbol{B}} \ldots \geq_{\boldsymbol{B}} \varphi(u_k) \geq_{\boldsymbol{B}} \varphi(u_{k+1}) \geq_{\boldsymbol{B}} \ldots$$

Por nga kushti kemi që S kënaq konditën $\min_{\boldsymbol{B}}$ kështu që gjendet një $k \in \mathbb{N}$ e tillë që $(\varphi(u_k), \varphi(u_{k+1})) \in \boldsymbol{B}$ e për pasojë $\varphi(u_k), \varphi(u_{k+1}) \in \boldsymbol{K}_{\varphi(u_k)}$. Por kjo e fundit do të thotë se u_k dhe u_{k+1} i përkasin së njëjtës $\varphi^{-1}(\boldsymbol{K}_{\varphi(u_k)})$ dhe ndërkaq $u_k <_{llex} u_{k+1}$ që nënkupton se $u_{k+1} \in F(\omega) \cap I$.■

Kombinimi i teoremës 2.1 tek (Shasivari, A. (2017)) me pohimin 3.1 jep rrjedhimin e mëposhtëm.

Rrjedhim 3.2. *Në qoftë se* $(S, \cdot, \leq)$ *është një po-gjysmëgrup i renditur me përftim të fundëm që plotëson konditën* $\min_{\boldsymbol{B}}$ *lidhur me bi-idealet e renditur dhe është i tillë që bashkësia e bi-idealeve të renditur formon semilatisë lidhur me shumëzimin e bashkësive, atëherë S është një semilatisë e fundme po-gjysmëgrupesh* $\boldsymbol{B}$ *të thjeshtë.*

Analogu i këtij për gjysmëgrupet e pa renditur, që përftohet duke marrë si relacion të renditjes pikërisht barazimin, do të ishte si më poshtë.

Rrjedhim 3.3. *Në qoftë se* $(S,\cdot)$ *është një gjysmëgrup me përftim të fundëm që plotëson konditën* $\min_B$ *lidhur me bi-idealet dhe është i tillë që bashkësia e bi-idealeve formon semilatisë lidhur me shumëzimin e bashkësive, atëherë S është një semilatisë e fundme gjysmëgrupesh* $\boldsymbol{B}$ *të thjeshtë.*

Literatura

Baader, F., Nopkow, T. (1998): Term Rewriting and all That, Cambridge Universitty Press

Cohn, P.M. (1965): Universal Algebra, Harper and Row

De Luca, A., Varricchio, S. (1999): Finiteness and Regularity in Semigroups and Formal Languages, Springer-Verlag

Howie, J. M. (1995): Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press Oxford

Kehayopulu, N., Tsingelis, M. (1995/1): On subdirectly irreducible ordered semigroups, Semigroup Forum 50, no. 2, 161-177

Kehayopulu, N., Tsingelis, M. (1995/2): Pseudoorder in Ordered Semigroups, Semigroup Forum 50 (1995), 389-392

Kehayopulu, N., Pasku, E., Tsingelis, M. (2006): An Embedding of an Ordered Groupoid Into an le-Groupoid, S. Forum, Vol. 73, 55-60

Pasku, E. (2006/1): Finiteness Conditions for Monoids and Small Categories, PhD Thesis, Glasgow

Pasku, E. (2006/2): Notes on finitely generated semigroups, Internat. J. Algebra Comput. Vol. 16, No. 3

Pin, J.E., Weil, P. (2002): The wreath product principle for ordered semigroups, Comm. Algebra 30, no. 12, 5677-5713

Shasivari, A. (2017): Ordered semigroups with commuting bi-ideals, J. of Natural and Technical Sciences, XXII (44), 2017 (1)

Shasivari, A., Pasku, E. (2017): Note on Free Ordered Semigroups, F.East J. of Math. Sciences, Volume 101, Number 4, 2017; 825-837

Xie Xiang-Yun. (2000): On Regular, Strongly Regular Congruences in Ordered Semigroups, Semigroup Forum 61, 159-178

Xie Xiang-Yun. (2008): On Strongly Ordered Congruences and Decompositions of Ordered Semigroups, Algebra Colloquium 15 : 4, 589-598