SJELLJA OSHILATORE E ZGJIDHJEVE TË EKUACIONIT LINEAR DIFERENCIAL ME VONESA TË RENDIT TË DYTË

ELISABETA PETI (KOÇI).[1], ELFRIDA DISHMEMA.[2]

[1]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

[2]Universiteti Bujqësor i Tiranës, Fakulteti i Ekonomisë dhe Agrobiznesit, Departamenti i Matematikës dhe Informatikës

e-mail: elisabeta.koci@fshn.edu.al

Përmbledhje

Shumë modele matematikore të proçeseve oshiluese përshkruhen nga ekuacionet diferenciale lineare dhe jo lineare të rendit të dytë. Në këtë punim jemi përqëndruar në sjelljen oshilatore të zgjidhjeve të ekuacionit diferencial me një vonesë të rendit të dytë vijues :

$$\text{(E)} \qquad \left(p(t)x'(t)\right)' + q(t)x\left(\tau(t)\right) = 0, \qquad t \geq 0.$$

Ekuacioni (E) është oshilator në qoftë se të gjitha zgjidhjet e ekuacionit (E) kanë pafundësisht zero mbi $[0, \infty)$, përndryshe, themi që ekuacioni (E) është jooshilator. Në bazë të teoremës së ndarjes së Shturmit, në qoftë se një prej zgjidhjeve të ekuacionit (E) është oshilatore, atëherë edhe gjithë të tjerat janë po oshilatore. E njëjta gjë është e vertetë edhe për mos oshilacionin e ekuacionit (E). Në këtë punim jemi interesuar për ekuacionet me koefiçientë të integrueshëm, pra $p(t)$ dhe $q(t)$ kënaqin supozime të ndryshme nën integrale. Propozimi ynë në ketë punim është të provojmë disa kritere oshilacioni për ekuacionin (E) me koeficientë të integrueshëm. Qëllimi ynë është të ndërtojmë kushte të mjaftueshme për ekuacionin (E) që të jetë oshilator duke përdorur një përgjithësim të teoremës së mesatarizimit të Lagranzhit, mosbarazimin diferencial Rikati dhe teoremën e krahasimit të Shturmit. Rezultati i marrë është i ndryshëm nga rezultatet e njohura dhe përmirëson disa prej tyre madje mbulon rastet që nuk mbulohen nga kriteret e njohura.

Fjalëkyçe: Zgjidhje oshilatore, kriter oshilacioni, ekuacion me vonesa, koefiçientë të integrueshëm.

Abstract

Many mathematical models of oscillating processes are described by linear and non linear differential equations of the second order. The aim of this paper is to present oscillation criteria for solutions of the following second order delay differential equation :

$$\text{(E)} \qquad \left(p(t)x'(t)\right)' + q(t)x\left(\tau(t)\right) = 0, \qquad t \geq 0.$$

We call equation (E) oscillatory if all solutions of (E) have arbitrarily large zeros on $[0, \infty)$, otherwise, we say equation (E) is nonoscillatory. As a consequence of Sturm's Separation Theorem, if one of the solutions of (E) is oscillatory, then all of them are. The same is true for the nonoscillation of (E). We are interested in equations with integrable coefficients, namely those $p(t)$ and $q(t)$satisfying the some different assumptions. The purpose of this paper is to provide some new oscillation criteria for equation (E) with integrable coefficients. The aim of this paper is to derive sufficient conditions for equation (E) to be oscillatory by using a generalization of the Lagrange mean-value theorem, the Riccati differential inequality and by Sturm comparison theorem. The result improves some previous oscillation criteria and complement the cases which are not covered by known results.

Key words: Oscillatory solutions, oscillation criteria, delay equation, integrable coefficients.

Hyrje

Gjatë tre dekadave të fundit, studimi i ekuacioneve diferenciale me vonesa dhe i ekuacioneve dinamike me vonesa ka tërhequr vëmendjen e studiuesve të shumtë për shkak të rëndësisë së tyre si në teori ashtu edhe në aplikime. Fenomene të shumta në shkencat fizike, inxhinierike, biologjike mund të modelohen nga ekuacionet diferenciale sidomos të rendit të dytë. Për më tepër, dihet se rezultatet në ekuacionet diferenciale të rendit të dytë luajnë një rol të rëndësishëm në studimin e ekuacioneve diferenciale të rendit më të lartë se dy.

Ekuacionet diferenciale me vonesa (D.D.E) ofrojnë modele realiste matematikore për sistemet në të cilat shkalla e ndryshimit varet jo vetëm nga periudha momentale e studimit, por edhe nga historia e tyre në të shkuarën. Ato ekuacione lindin natyrshëm në modelimin e shumë sistemeve që përfshijnë vonesa kohore; të tilla si modelet e popullsisë, modele mbi epidemitë, modelet ekonomike, modelet mbi punën e reaktorëve bërthamorë etj.

Teoria e Oshilacionit tashmë prej kohësh i ka zgjeruar kufijtë e saj të studimit nga ekuacionet diferenciale të zakonshme (O.D.E) tek ekuacionet diferenciale me vonesa (D.D.E) e më tej. Sidoqoftë, me rëndësi të veçantë ka qenë dhe mbetet studimi i luhatjeve (oshilacioneve) të shkaktuara ose të shkatërruara nga vonesa dhe të cilat nuk paraqiten në korresponduesin përkatës (O.D.E).

Ky punim është një vazhdim i huluntimit mbi ekuacionet (D.D.E) ku jemi të interesuar për problemin e mëposhtëm: kushte të mjaftueshme për oshilacionin e të gjithë zgjidhjeve të ekuacionit (D.D.E) të marrë në shqyrtim. Disa nga teknikat e përdorura nëpër literaturën e gjerë të teorisë së oshilacionit për përcaktimin e këtyre kritereve janë: teknika krahasuese e Shturmit, teknika e linearizimit, metoda e përgjithësuar e Rikatit, metoda e mesatarizimit integral, funksionet pozitive të Philos si dhe teknika të tjera specifike për një tip të veçantë ekuacioni. Nga vetë tipi i ekuacionit disa prej tyre nuk do të jemi në gjendje t'i përdorim. Qëllimi ynë është që kriteret e fituara të zgjerojnë dhe përmirësojnë ndonjë prej rezultateve ekzistuese (në kuptimin e zgjidhjes së problemit për disa ekuacione të pa mbuluara prej tyre).

Gjatë gjithë këtij punimi, do të konsiderojmë ekuacionin diferencial linear të rendit të dytë me një vonesë

$$\left(p(t)x'(t)\right)' + q(t)x\left(\tau(t)\right) = 0 \qquad \text{(E)}$$

në intervalin $[t_0; \infty)$ $(t_0 \in R;\ t_0 \geq 0)$. Kushtet e mëposhtme i supozojmë të kënaqura në të gjithë punimin:

(i) $p \in C\left([t_0; \infty)\right)$, $p(t) > 0$;

(ii) $q \in C\left([t_0; \infty)\right)$, $q(t) \geq 0$, $q(t) \neq 0$ në çdo fqinjësi të pafundësisë;

(iii) $\tau \in C\left([t_0; \infty)\right)$, $\tau(t) \leq t$, dhe $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$.

Një funksion u është zgjidhje e ekuacionit (E) për $t \geq t_0$ n.q.s $u \in C^1[t_0; \infty)$, $pu' \in C^1[t_0; \infty)$ dhe kënaq ekuacionin (E) për $t \geq t_0$. Në vazhdim në vëmendjen tonë do të jenë ato zgjidhje të ekuacioneve të shqyrtuara që analitikisht nuk mund të përcaktohen lehtë. Një zgjidhje e tillë quhet oshiluese nëse ka pafundësisht zero mbi $[0, \infty)$, pra ekziston vargu $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ ku $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, i tillë që $u(\lambda_n) = 0$. Një ekuacion thuhet se është oshilator nëse të gjitha zgjidhjet e tij janë oshilatore dhe jooshilator nëse të gjitha zgjidhjet e tij janë jooshilatore. Problemi kryesor në të cilin jemi fokusuar në këtë punim është ekzistenca e zgjidhjeve oshiluese për ekuacionin nën studim (E). Vlen të përmendim monografitë e Myshkis (1972) dhe Agarwal et al. (2012), të cilat na njohin me rezultate të ndryshme mbi problemin nën studim.

Qëllimi ynë është të provojmë një rezultat të përgjithshëm mbi ekuacionin (E) për ekzistencën e zgjidhjeve oshiluese, duke përdorur konceptin e funksionit *v*-derivativ të Ohriskës. Koncept që na ndihmon të përgjithësojmë teknika të kësaj teorie siç janë, teorema e vlerës së mesme të Lagranzhit, mosbarazimi diferencial Rikati apo teorema e krahasimit Shturm.

1. Rezultatet ndihmëse

Le të fillojmë me përkufizimin e mëposhtëm që e gjejmë tek Ohriska (1989).

Përkufizim 1.1.

Supozoj që funksionet f dhe v janë përcaktuar në një fqinjësi $O(t)$ të një pike $t \in R$ dhe supozojmë që kushtet $x \in O(t);\ x \neq t$ implikojnë që $v(x) \neq v(t)$. Në qoftë se limiti

$$\lim_{x\to t} \frac{f(x) - f(t)}{v(x) - v(t)}$$

ekziston, atëherë ai është quajtur *v*-derivat i funksionit f në pikën t dhe është paraqitur me simbolin $f'_v(t)$ ose $\frac{df(t)}{dv(t)}$.

Teoremat e mëposhtme japin disa rezultate në lidhje me *v*-derivatin të ngjashme me ato të derivatit të zakonshëm.

Teoremë 1.1.

Në qoftë se ekziston $v'(t) \neq 0$ mbi një interval $I \subset R$, atëherë për $t \in I$ funksioni v-derivat $f'_v(t)$ ekziston në qoftë se dhe vetëm në qoftë se derivativi $f'(t)$ ekziston. Për më tepër lidhja ndërmjet tyre shprehet nëpërmjet formulës vijuese

$$f'_v(t) = \frac{f'(t)}{v'(t)}.$$

Le të shënojmë me $P(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{p(s)}$. Në këtë punim do të kërkojmë përmbushjen e kushteve

$$P(\infty) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)} = \infty, \tag{1.1}$$

ose

$$P(\infty) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)} < \infty. \tag{1.2}$$

Në vijim të punimit tonë do të na duhen edhe këto lema.

Lemë 1.1.

Le të jetë $u \in C^1[t_0;\infty)$ dhe supozojmë që $\frac{d^2u(t)}{dtdP}$ ekziston për $t \geq T \geq t_0$. Në qoftë se

$$u(t)\frac{du(t)}{dP} \geq 0, \qquad u(t)\frac{d^2u(t)}{dtdP} \leq 0 \;\; për\; t \geq T; \tag{1.3}$$

ku në ndonjë fqinjësi të infinitit barazimet nuk mund të mbeten, atëherë për çdo $k \in (0,1)$ gjendet një numër $T^* \geq T$ i tillë që

(a) $|u(t)| \geq kP(t)\left|\frac{du(t)}{dP}\right|$ për $t \geq T^*$, në qoftë se kushti (1.1) kënaqet,

(b) $|u(t)| \geq k\frac{1}{p(t)}\left|\frac{du(t)}{dP}\right|$ për $t \geq T^*$, në qoftë se funksioni p është jo-zbritës në një fqinjësi të infinitit.

Lemë 1.2.

Le të jetë $u \in C^1[t_0;\infty)$ dhe supozojmë që $\frac{d^2u(t)}{dtdP}$ ekziston për $t \geq T \geq t_0$. Në qoftë se

$$u(t)\frac{du(t)}{dP} \geq 0, \qquad u(t)\frac{d^2u(t)}{dtdP} \leq 0 \;\; për\; t \geq T; \tag{1.4}$$

ku në ndonjë fqinjësi të infinitit barazimet nuk mund të mbeten, atëherë për çdo $k \in (0,1)$ gjendet një numër $T^* \geq T$ i tillë që

(a) $|u(\tau(t))| \geq kP(\tau(t))|u(t)|$ për $t \geq T^*$ në qoftë se kushti (1.1) kënaqet,

(b) $|u(\tau(t))| \geq k\frac{\tau(t)}{t}|u(t)|$ për $t \geq T^*$, në qoftë se funksioni p është jo-zbritës në një fqinjësi të infinitit.

Në rastin kur kushti (1.1) nuk plotësohet, pra plotësohet kushtit vijues (1.2)

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)} < \infty,$$

atëherë kanë vend lemat e mëposhtëme.

Lemë 1.3.

Le të jetë $u \in C^1[t_0;\infty)$ dhe supozojmë që $\frac{d^2u(t)}{dtdP}$ ekziston për $t \geq T \geq t_0$. Në qoftë se

$$u(t)\frac{du(t)}{dP} \leq 0, \qquad u(t)\frac{d^2u(t)}{dtdP} \leq 0 \quad për\ t \geq T \geq t_0; \tag{1.5}$$

ku në ndonjë fqinjësi të infinitit barazimet nuk mund të mbeten, atëherë kushti (1.2) kënaqet.

Lemë 1.4.

Le të jetë $u \in C^1[t_0;\infty)$ dhe supozojmë që $\frac{d^2u(t)}{dtdP}$ ekziston për $t \geq T \geq t_0$. Në qoftë se

$$u(t)\frac{du(t)}{dP} \geq 0, \qquad u(t)\frac{d^2u(t)}{dtdP} \geq 0 \quad për\ t \geq T \geq t_0; \tag{1.6}$$

ku në ndonjë fqinjësi të infinitit barazimet nuk mund të mbeten, atëherë kushti (1.2) kënaqet.

2. Rezultatet kryesore

Konsiderojmë ekuacionin (E) në formën e vetë kanonike, d.m.th rasti kur kushti (1.1) mbetet i vërtetë.

Teoremë 2.1.

Supozojmë që kushti (1.1) mbetet i vërtetë, dhe

$$\limsup_{t\to\infty} P(t)\int_t^{\infty} q(s)\frac{P(\tau(s))}{P(s)}ds > 1,$$

atëherë ekuacioni (E) është oshilator.

Vërtetim. Supozojmë se ekziston të paktën një zgjidhje jooshilatore u e ekuacionit (E). Pa humbur gjë nga përgjithësimi ($-u$ është një zgjidhje e (E) gjithashtu) ne mund të themi që $u(t) > 0$ dhe $u(\tau(t)) > 0$ për $t \geq T \geq t_0$. Atëherë nga ekuacioni (E) kemi që $(p(t)u'(t))' \leq 0$ për $t \geq T$. Nëse $p(t)u'(t) \leq 0$ për $t \geq T$ nga Lema 1.3 do të kënaqej kushti (1.2) dhe jo kushti nën studim (1.1). Pra, mbetet i vërtetë mosbarazimi $p(t)u'(t) > 0$ për $t \geq T$. Si rrjedhim nëse integrojmë mbi ekuacionin (E) nga t tek ∞ dhe nga monotonia e funksionit $p(t)u'(t)$ marrim mosbrazimin

$$p(t)u'(t) = \frac{du(t)}{dP} \geq \int_t^{\infty} q(s)u(\tau(s))\,ds. \tag{2.1}$$

Duke shumëzuar në të dyja anët e mosbarazimit (2.1) me $kP(t)$, ku $k \in (0{,}1)$ dhe duke përdorur Lemën 1.1.(a) , marrim mosbarazimin vijues

$$u(t) = |u(t)| \geq kP(t)\int_t^{\infty} q(s)u(\tau(s))\,ds, \qquad t \geq T^* \geq T. \tag{2.2}$$

Meqë kushtet e Lemës 1.2 nuk ndryshojnë me ato të Lemës 1.1 atëherë mosbarazimi (a) i Lemës 1.2 dhe monotonia (rritës) e funksionit zgjidhje u ku $u(\tau(t)) > 0$, implikojnë mosbarazimet në vazhdim

$$u(\tau(t)) = |u(\tau(t))| \geq kP(\tau(t))|u(t)| \geq k^2P(t)P(\tau(t))\int_t^{\infty} q(s)u(\tau(s))\,ds$$

$$1 \geq \frac{k^2P(t)P(\tau(t))}{u(\tau(t))}\int_t^{\infty} q(s)u(\tau(s))\,ds,$$

$$1 \geq k^2P(t)\int_t^{\infty} q(s)\frac{P(\tau(s))}{P(s)}\,ds, \qquad t \geq \hat{T} \geq T^*,\ \ k \in (0{,}1). \tag{2.3}$$

Por, mosbarazimi i fundit që është i vërtetë për $\forall k \in (0{,}1)$ na lejon të konkludojmë

$$\limsup_{t\to\infty} P(t)\int_t^{\infty} q(s)\frac{P(\tau(s))}{P(s)}\,ds < \infty. \tag{2.4}$$

Përfundimi i mësipërm (2.4) dhe kushti i teoremës na lejon të veprojmë si në vijim:

$$1 < \alpha = \limsup_{t\to\infty} P(t)\int_t^{\infty} q(s)\frac{P(\tau(s))}{P(s)}\,ds < \infty.$$

Pra, ekzistenca e $\alpha -$ ës sjell edhe ekzistencën e një vargu $\{t_n\}_{n\in N}$ të tillë që $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ dhe $\lim_{n\to\infty} P(t_n)\int_{t_n}^{\infty} q(s)\frac{P(\tau(s))}{P(s)}\,ds = \alpha > 1$. Nëse në vazhdim marrim numrin $\xi = \frac{\alpha-1}{4} > 0$ atëherë ekziston një numër n_0 i tillë që për çdo $n \in N;\ n \geq n_0$ të kemi:

$$\alpha - \xi = \frac{3\alpha+1}{4} < P(t_n)\int_{t_n}^{\infty} q(s)\frac{P(\tau(s))}{P(s)}\,ds.$$

Në qoftë se ne zgjedhim $n > n_0$ të tillë që $t_n \geq \bar{T}$ dhe marrim $k \in \left(\sqrt{\frac{4}{3\alpha+1}}, 1\right)$, atëherë

$$k^2 P(t_n) \int_{t_n}^{\infty} q(s) \frac{P(\tau(s))}{P(s)} ds > k^2 \frac{3\alpha+1}{4} > \frac{4}{3\alpha+1} \frac{3\alpha+1}{4} = 1$$

i cili kundërshton mosbarazimin (2.3).■

Konkluzion 2.1.

Në teoremën e mësipërme vihet re se brenda shenjës së integralit ndodhet funksioni vonesë $\tau(s)$ gjë që vështirëson përdorimin e saj sidomos në aplikacione. Ndaj me ndihmën e teknikës së mëposhtme do të nxjerrim jashtë shenjës së integralit funksionin vonesë, por jemi të detyruar të mbajmë në kufijtë e tij një funksion të ri të lindur prej vonesës. ■

Le të ndërtojmë funksionin e ri $\omega(t)$ duke ditur ekzistencën e kushtit $\tau(t) \leq t$,

$$\omega(t) = sup\{s \geq t_0 \ / \ \tau(s) \ \leq t\} \text{ për } t \geq t_0.$$

Nga ndërtimi i funksioni të ri ω shihet qartë që $t \leq \omega(t)$.

Teoremë 2.2.

Supozojmë që kushti (1.1) mbetet i vërtetë dhe

$$\limsup_{t\to\infty} P(t) \int_{A(t)}^{\infty} q(s)\, ds > 1, \tag{2.5}$$

atëherë ekuacioni (E) është oshilator.

Vërtetim. Vërtetimi i teoremës paraardhëse 2.1 përsëritet deri në momentin e mosbarazimit (2.2). Meqë $\omega(t) \geq t$ atëherë marrim mosbarazimet:

$$u(t) \geq kP(t) \int_t^{\infty} q(s) u(\tau(s)\, ds \geq kP(t) \int_{\omega(t)}^{\infty} q(s) u(\tau(s)\, ds, \qquad t \geq T^* \geq T.$$

Nga ndërtimi i funksionit ω, për $s \geq \omega(t)$ do të kemi patjetër që $\tau(s) \ \geq t$. Por, $p(t)u'(t) > 0$, pra funksioni u është rritës dhe për rrjedhojë nga mozbarazimi i mësipërm marrim

$$u(t) \geq kP(t) u(t) \int_{\omega(t)}^{\infty} q(s)\, ds, \qquad t \geq T^*.$$

Mosbarazimi i mëposhtëm i ngjashëm me mosbarazimin (2.3)

$$1 \geq kP(t) \int_{\omega(t)}^{\infty} q(s)\, ds, \qquad t \geq T^*, \tag{2.6}$$

na çon në rezultatin

$$1 < \beta = \limsup_{t\to\infty} P(t) \int_{\omega(t)}^{\infty} q(s)\, ds < \infty.$$

Atëherë si në vërtetimin e teoremës 2.1, marrim një kundërthënie.■

Konkluzion 2.2.

Në teoremën e mësipërme kriteri integral i ndërtuar ka në kufirin e poshtëm një funksion të ri $\omega(t)$ të lindur prej funksionit vonesë $\tau(t)$. Në rastin kur ky i fundit është monoton rritës atëherë funksioni ω është i anasjellti i funksionit τ. Pra mund ta thjeshtojmë akoma më tepër kriterin integral, si në rrjedhimin vijues të Ohriska (1989). ■

Rrjedhim 2.1

Supozojmë që kushti (1.1) ka vend dhe τ është funksion monoton rritës. Në qoftë se

$$\limsup_{t\to\infty} P(\tau(t)) \int_t^{\infty} q(s)\, ds > 1,$$

atëherë ekuacioni (E) është oshilator.■

Konkluzion 2.3.

Në, J. Džurina (1997) është treguar se ekuacioni (E) është oshilator kur kushti (1.1) kënaqet dhe

$$\liminf_{t\to\infty} P(\tau(t)) \int_t^{\infty} q(s)\, ds > \frac{1}{4}.$$

Është e qarte që konkluzioni i rrjedhimit 2.1 është plotësues i rezultatit të Džurinës. Mirëpo nga ana tjetër, nëse $\lim\limits_{t\to\infty} P(\tau(t)) \int_t^{\infty} q(s)\, ds$ ekziston, atëherë ka vend barazimi vijues

$$\lim_{t\to\infty} P(\tau(t)) \int_t^{\infty} q(s)\, ds = \liminf_{t\to\infty} P(\tau(t)) \int_t^{\infty} q(s)\, ds =$$
$$= \limsup_{t\to\infty} P(\tau(t)) \int_t^{\infty} q(s)\, ds$$

.

Pra shihet qartë se në këtë rast rezultati i Džurinës është më i mirë se ai i rrjedhimit 2.1. Megjithatë, në rastin e kundërt (mos ekzistenca e limitit) ka raste kur rezultati i Džurinës nuk na jep rezultat pozitiv. Për këtë na ndihmon shembulli i mëposhtëm.

Shembull 2.1.

Konsiderojmë ekuacionin

$$\left(\frac{5}{6+4(\sin\ln t + \cos\ln t)} x'(t)\right)' + \frac{1}{t^2}\left(\frac{3}{2} + \sin\ln\frac{t}{2} - \cos\ln\frac{t}{2}\right) x\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \quad (2.7)$$

mbi intervalin $[1, \infty)$. Atëherë funksionet

$$p(t) = \frac{5}{6 + 4(sinlnt + coslnt)} \quad \text{dhe} \quad q(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{3}{2} + sinln\frac{t}{2} - cosln\frac{t}{2}\right)$$

janë të vazhdueshëm dhe pozitiv për $t \geq 1$. Funksioni vonesë $\tau(t) = \frac{t}{2}$

është rritës për $t \geq 1$. Atëherë për $t_0 = 1$ kemi,

$$P(t) = \int_1^t \frac{ds}{p(s)} = \int_1^t \frac{[6 + 4(sinlns + coslns)]ds}{5} = \frac{6}{5}(t-1) + \frac{4}{5}[t \cdot sinlnt].$$

Pra si rrjedhojë, vihet re plotësimi i kushtit (1.1)

$$P(\infty) = \int_1^\infty \frac{dt}{p(t)} = \infty.$$

Meqë

$$P(\tau(t)) = P\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{t}{2} - 1\right) + \frac{4}{5}\left[\frac{t}{2} \cdot sinln\frac{t}{2}\right]$$

dhe

$$\int_t^\infty q(s)\,ds = \lim_{y\to\infty}\int_t^y q(s)\,ds = \lim_{y\to\infty}\int_t^y \frac{1}{s^2}\left(\frac{3}{2} + sinln\frac{s}{2} - cosln\frac{s}{2}\right)ds =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left[\left[\frac{1}{y}sinln\frac{2}{y} - \frac{3}{2y}\right] - \left[\frac{1}{t}sinln\frac{2}{t} - \frac{3}{2t}\right]\right] = \frac{1}{t}\left[\frac{3}{2} - sinln\frac{2}{t}\right].$$

Rezultati Džurina

$$\liminf_{t\to\infty} P(\tau(t))\int_t^\infty q(s)\,ds =$$

$$= \liminf_{t\to\infty}\left[\frac{6}{5}\left(\frac{t}{2} - 1\right) + \frac{4}{5}\left[\frac{t}{2} \cdot sinln\frac{t}{2}\right]\right]\frac{1}{t}\left[\frac{3}{2} - sinln\frac{2}{t}\right] =$$

$$= \liminf_{t\to\infty}\left[\frac{3}{5}\left(1 - \frac{2}{t}\right) - \frac{2}{5}sinln\frac{2}{t}\right]\left[\frac{3}{2} - sinln\frac{2}{t}\right] = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{10} < \frac{1}{4}.$$

Pra, rezultati i Džurinës nuk mund të aplikohet në këtë rast.

<u>Rrjedhimi 2.1</u>

$$\limsup_{t\to\infty} P(\tau(t))\int_t^\infty q(s)\,ds =$$

$$= \limsup_{t\to\infty}\left[\frac{3}{5}\left(1 - \frac{2}{t}\right) - \frac{2}{5}sinln\frac{2}{t}\right]\left[\frac{3}{2} - sinln\frac{2}{t}\right] = \frac{5}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{2} > 1.$$

Pra, nga rrjedhimi 2.1 shohim që ekuacioni (2.7) është oshilator.∎

Por nëse fare pak ndryshojmë ekuacionin (shembulli në vijim) duket fare qartë se të dy konkluzionet na ndihmojnë për oshilacionin e zgjidhjeve.

Shembull 2.2.

Konsiderojmë ekuacionin

$$\left(\frac{3}{4+2(coslnt+sinlnt)}x'(t)\right)'+\frac{1}{t^2}\left(\frac{5}{2}+sinln\frac{t}{2}-cosln\frac{t}{2}\right)x\left(\frac{t}{2}\right)=0 \quad (2.8)$$

mbi intervalin $[1,\infty)$. Atëherë me të njëjtin arsyetim si në shembullin 2.1 marrim këto konkluzione:

Rezultati Džurina

$$\liminf_{t\to\infty} P(\tau(t))\int_t^\infty q(s)\,ds=$$

$$=\liminf_{t\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{t}{2}-1\right)+\frac{2}{3}\left[\frac{t}{2}\cdot sinln\frac{t}{2}\right]\right]\frac{1}{t}\left[\frac{5}{2}-sinln\frac{2}{t}\right]=$$

$$=\liminf_{t\to\infty}\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{t}\right)-\frac{1}{3}sinln\frac{2}{t}\right]\left[\frac{5}{2}-sinln\frac{2}{t}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}.$$

Pra, rezultati i Džurinës mund të aplikohet në këtë rast.

Rrjedhimi 2.1

$$\limsup_{t\to\infty} P(\tau(t))\int_t^\infty q(s)\,ds=$$

$$=\limsup_{t\to\infty}\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{t}\right)-\frac{1}{3}sinln\frac{2}{t}\right]\left[\frac{5}{2}-sinln\frac{2}{t}\right]=\frac{3}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{2}>1.$$

Pra, si nga Rrjedhimi 2.1 dhe nga rezultati Džurina shohim që ekuacioni (2.8) është oshilator. ■

Konkluzion 2.4.

Shembujt e mësipërm treguan mbulim me kriter oshilator të lindur nga koncepti i funksionit *v*-derivat edhe të një ekuacioni (grup ekuacionesh) të pambuluar nga kriteret e Džurinës apo kritere të njohura. Në teorinë e oshilacionit dihet se kjo nuk do të thotë që kriteret e marra nga dy teoremat, 2.1 dhe 2.2 si edhe rrjedhimi 2.1 janë më të mirat në rendin përmirësues, por janë kritere selektuese për oshilacionin e zgjidhjeve në morinë e kritereve të njohura për ekuacionet diferenciale me vonesa të rendit të dytë pa faktor shuarës.■

Literatura

Myshkis A. D. (1972): Linear Differential Equations with Delayed Argument, Nauka, Moscow, Russia

Agarwal R. P, Berezansky L, Braverman E and Domoshnitsky A. (2012): Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications, Springer, New York, NY, USA

Ohriska J. (1989): Oscillation of differential equations and v-derivatives, Czechoslovak Math. J, Vol 39, 24–44

Džurina J. (1997): Oscillation of a second order delay differential equations, Arch. Math. (Brno), Vol 33, 309–314

Baculíková B and Džurina J. (2013): On certain inequalities and their applications in the oscillation theory. Advances in Difference Equations, Springer