ELEMENTËT $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{B}$,)-IDEMPOTENTË NË *le*-GJYSMËGRUPET

AIDA SHASIVARI.[1], ELTON PASKU.[2]

[1]Universiteti Politeknik i Tiranës, Fakulteti i Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike, Departamenti i Matematikës

[2]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

e-mail: aida.shasivari@yahoo.com

Përmbledhje

Për një le-gjysmëgrup të çfarëdoshëm S dhe një $\mathcal{L}$-klasë L të tij që plotëson konditën e Grinit ($L \cap L^2 \neq \emptyset$;), është konsideruar nënbashkësia $\mathfrak{L}$ e L e përbërë nga ata elementë, katrorët e të cilëve bëjnë pjesë në L dhe është treguar se $\mathfrak{L}$ formon nëngjysmëgrup të S i cili kënaq relacionin $\mathfrak{L}L \cap L\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$. Rezultate analoge me këtë janë provuar edhe për relacionet $\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{B}$.

Fjalëkyçe: le-gjysmëgrup, relacionet $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{B}$, kondita e Grinit.

Abstract

For any le-semigrup S and any $\mathcal{L}$-class L which satisfies the Green condition ($L \cap L^2 \neq \emptyset$;), it is considered the subset $\mathfrak{L}$ of L consisting of all those elements whose square belongs to L and it is proved that $\mathfrak{L}$ is a subsemigroup of S which satisfies the additional property $\mathfrak{L}L \cap L\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$. Similar results to the above are proved for relations $\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{B}$.

Key words: le-semigrup, relations $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{B}$, Green condition.

1 Hyrje

Një po-gjysmëgrup (gjysmëgrup i renditur) është një treshe $(S,\leq,\cdot)$ ku $\leq$ është një relacion renditjeje në S dhe është një veprim shoqërimtar në S që kënaq konditat e mëposhtme:

$$a \leq b \Rightarrow xa \leq xb \text{ dhe } ax \leq bx \text{ për } cdo\ x \in S:$$

Në qoftë se $(S,\leq,\cdot)$ është një po-gjysmëgrup që ka element më të madh atëherë ai do të quhet një poe $-$gjysmëgrup dhe do të quhet $\vee e$-gjysmëgrup në qoftë se $(S,\leq)$ është një gjysmëlatisë e sipërme. Në qoftë se për më tepër ndodh që $(S,\leq)$ është latisë (kufiri i përpiktë i poshtëm $\wedge$ dhe kufiri i përpiktë i sipërm $\vee$ i çdo dy elementëve të S ekziston), atëherë S do të quhet një le-gjysmëgrup. Shënimi standard për le-gjysmëgrupin në këtë rast është

$\langle S,\cdot,\vee,\wedge\rangle$. Këtu renditja nuk është bërë eksplicite, por nënkuptohet duke pozuar $a \leq b$ vetëm në qoftë se $a \wedge b = a$.

Kehayopulu tek Kehayopulu, (1989) dhe tek Kehayopulu, (1990) ka përkufizuar relacionet e mëposhtëme të ekuivalencës në një le-gjysmëgrup $\langle S,\cdot,\vee,\wedge\rangle$:

$$\mathcal{L}=\{(x,y) \in S \times S \mid x \vee ex = y \vee ey\},$$

$$\mathrm{R} =\{(x,y) \in S \times S \mid x \vee xe = y \vee ye\},$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L};$$

ndërsa në Kehayopulu, (1995) ka përkufizuar edhe relacionin:

$$\mathcal{B} = \{(x,y) \in S \times S \mid x \vee xex = y \vee yey\}$$

Shoqëruar relacioneve $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ dhe $\mathcal{B}$ janë përcaktuar pasqyrimet e mëposhtëme:

$$l : S \to S \ i\ tillë\ që\ l(x) = ex \vee x$$

$$r : S \to S\ i\ tillë\ që\ r(x) = xe \vee x$$

$$b : S \to S\ i\ tillë\ që\ b(x) = xex \vee x.$$

Është e qartë që $(x, y) \in \mathcal{L}$ vetëm në qoftë se $l(x) = l(y)$ e ngjashmërisht, $(x, y) \in \mathcal{R}$ vetëm në qoftë se $r(x) = r(y)$, apo $(x, y) \in \mathcal{B}$ vetëm në qoftë se $b(x) = b(y)$.

Në (Petro & Pasku, 2002) është konsideruar plotësimi i të ashtuquajturës konditë e Grinit në një $\mathcal{H}$ –klasë H të një le-gjysmëgrupi që nënkupton ekzistencën e dy elementëve të klasës prodhimi i të cilëve është element i klasës. Është provuar në teoremën 2.1 (1) se kur plotësohet kondita e Grinit për klasën H, atëherë ekziston një element $q \in H$ i tillë që $q^2 \in H$. Kjo do të thotë se në kushtet e plotësimit të konditës së Grinit nënbashkësia $\mathfrak{H}$ e elementëve të H katrorët e të cilëve bëjnë pjesë në H është jo-boshe.

Ndërsa në teoremën 3.1 (2) është provuar se klasa H që plotëson konditën e Grinit është nëngjysmëgrup i S vetëm kur për çdo $x \in H, x^2 \in H$. Deri më sot është e pa studiuar në literaturë bashkësia $\mathfrak{H}$. Studimi i $\mathfrak{H}$ është me interes pasi në optikën e dy rezultateve të sipër cituara nga (Petro & Pasku, 2002) duket se masa me të cilën një $\mathcal{H}$-klasë H që plotëson konditën e Grinit dështon të jetë nëngjysmëgrup i S do tëvaret nga masa me të cilën H ndryshon nga $\mathfrak{H}$.

Kondita e Grinit mund të konsiderohet edhe për relacionet e tjerë $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{B}$ dhe krahas kësaj bashkësitë $\mathfrak{L}, \mathfrak{R}$ dhe $\mathfrak{B}$ të klasave respektive që përmbajnë ata elementë të klasave katrorët e të cilëve bëjnë pjesë në klasë.

2 Elementët $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{B}$)-idempotentë

Do të themi se një element a i një le-gjysmëgrupi S është $\mathcal{L}$-idempotent (resp..$\mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{B}$-idempotent) në qoftë se $(a, a^2) \in \mathcal{L}$

(përkatësisht $(a, a^2) \in \mathcal{R}$, $(a, a^2) \in \mathcal{H}$, $(a, a^2) \in \mathcal{B}$.

Së pari le të bindemi që elementët $\mathcal{L}$-idempotentë ekzistojnë vërtet.

Lema që vijon tregon se çdo $\mathcal{L}$-klasë që plotëson kushtet e Grinit përmban elementë të tillë.

Lema 2.1. Në qoftë se një $\mathcal{L}$-klasë L plotëson konditën e Grinit, atëherë ajo përmban një element ℓ të tillë që $\ell^2 \in L$.

Vërtetim. Çdo $\mathcal{L}$-klasë L përmban një element ideal të majtë ℓ unik. Vërtet, për çdo $x \in L$ shënojmë me $\ell = ex \vee x$ elementin ideal të majtë të përftuar nga x. Shohim se:

$$l(\ell) = e\ell \vee \ell = e(ex \vee x) \vee (ex \vee x) =$$
$$= eex \vee ex \vee ex \vee x = ex \vee x = \ell,$$

që tregon se $(\ell, x) \in \mathcal{L}$ ose ndryshe që $\ell \in L$. Në qoftë se ℓ' është një tjetër element ideal i majtë që i përket L, atëherë:

$$\ell' = e\ell' \vee \ell' = \ell$$

që tregon unicitetin. Në qoftë se për më tepër $\mathcal{L}$-klasa plotëson konditën e Grinit, atëherë kanë ekzistuar elementët $x, y \in L$ të tillë që $xy \in L$. Në këto kushte mund të shkruajmë

$$\ell^2 = (ex \vee x)(ey \vee y)$$

$$= exey \vee exy \vee xey \vee xy$$

$$= (exy \vee xy) \vee (exey \vee xey)$$

$$= \ell \text{ sepse } xy \in L \text{ dhe } ey \leq \ell$$

prej nga rrjedh se $(\ell, \ell^2) \in \mathcal{L}$.

Teoremë 2.1 Në qoftë se një $\mathcal{L}$-klasë L plotëson konditën e Grinit atëherë bashkësia $\mathfrak{L}$ e elementëve $\mathcal{L}$-idempotentë që ajo përmban formon nëngjysmëgrup të S. Për më tepër $L\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}L \subseteq \mathfrak{L}$.

Vërtetim. Le të jenë $x, y \in \mathfrak{L}$, pra $(x, y) \in \mathcal{L}$, $(x, x^2) \in \mathcal{L}$ dhe $(y, y^2) \in \mathcal{L}$. Po të nisemi nga barazimi

$$ex \vee x = ey \vee y$$

dhe të shumëzojmë djathtas të dyja anëve me y përftojmë

$$exy \vee xy = ey^2 \vee y^2 = ey \vee y$$

sepse $y \in \mathfrak{L}$. Kjo tregon se $xy \in L$. Tani të tregojmë se $(xy)^2 \in L$. Vërtet,

$$e(xy)^2 \vee (xy)^2 = (ex \vee x)(yxy)$$

$$= (ex)(yxy) \text{ nga kondita e Grinit}$$

$$= (ey)(yxy) \text{ sepse } (x, y) \in \mathcal{L}$$

$$= (ey^2)(xy) = (ey)(xy) \text{ sepse } y \in \mathfrak{L}$$

$$= (ex)(xy) = exy \text{ sepse } (x, y) \in \mathcal{L} \text{ dhe } x \in \mathfrak{L}$$

$$= e(xy) \vee (xy)$$

çka tregon se $(xy, (xy)^2) \in \mathcal{L}$.

Për pjesën e dytë të pohimit le të jetë $x\lambda = \lambda' x' \in L\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}L$. Së pari vemë re se

$$l(x\lambda) = ex\lambda \vee x\lambda = (ex \vee x)\lambda = e\lambda\lambda = e\lambda,$$

që tregon se $x\lambda \in L$. Tani të tregojmë se $x\lambda = \lambda' x' \in \mathfrak{L}$. Vërtet,

$$l((x\lambda)^2) = (e(x\lambda) \vee (x\lambda))x\lambda$$

$$= (e\lambda)(x\lambda) \text{ nga më sipër}$$

$$= (e\lambda')(\lambda' x') \quad \lambda' \in L$$

$$= (e\lambda')x'\lambda' \in \mathfrak{L}$$

$$= e(x\lambda) = l(x\lambda),$$

gjë që tregon se $x\lambda = \lambda' x' \in \mathfrak{L}$.

Një pohim i ngjashëm me të mësipërmen vlen dhe për elementët $\mathcal{R}$-idempotentë. Po e paraqesim më poshtë pa vërtetim pasi vërtetimi është i ngjashëm me atë të pohimit më sipër.

Teoremë 2.2. Në qoftë se një $\mathcal{R}$-klasë R plotëson konditën e Grinit, atëherë bashkësia $\mathfrak{R}$ e elementëve $\mathcal{R}$-idempotentë që ajo përmban, formon nëngjysmëgrup të S. Për më tepër $R\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}R \subseteq \mathfrak{R}$.

Në rastin e relacionit $\mathcal{H}$ rezultati për elementët $\mathcal{H}$-idempotentë është po aq interesant.

Le të jetë H një $\mathcal{H}$-klasë çfardo. Po shënojmë me $\mathfrak{H} = \{\alpha \in H: \alpha^2 \in H\}$ nënbashkësinë e elementëve $\mathcal{H}$-idempotentë që i përkasin H-së. Për këtë bashkësi ka vend teorema e mëposhtëme.

Teoremë 2.3. Në qoftë se H plotëson konditën e Grinit, atëherë $\mathfrak{H}$ formon nëngjysmëgrup të S. Për më tepër $\mathfrak{H}H \cap H\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$.

Vërtetim. Që $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ rrjedh nga [4].Të tregojmë tani se $\mathfrak{H}$ formon nëngjysmëgrup. Vërtet, për çdo $\alpha, \beta \in \mathfrak{H}$ kemi

$$r((\alpha\beta)^2) = r(\alpha\beta\alpha\beta) = \alpha\beta\alpha r(\beta) = \alpha\beta\alpha r(\alpha) =$$
$$= \alpha\beta r(\alpha^2) = \alpha\beta r(\alpha) = \alpha\beta r(\beta) = \alpha r(\beta^2) =$$
$$= \alpha r(\beta) = r(\alpha\beta)$$

që tregon se $((\alpha\beta)^2, \alpha) \in \mathcal{R}$. Nga ana tjetër kemi që

$$r(\alpha\beta) = \alpha r(\beta) = \alpha r(\alpha) = r(\alpha^2) = r(\alpha),$$

që së bashku me përfshirjen mësipër tregon se $((\alpha\beta)^2, \alpha\beta) \in \mathcal{R}$.

Njëlloj tregohet se $((\alpha\beta)^2, \alpha) \in \mathcal{L}$ nga e cila përfundimisht rrjedh se $\alpha\beta \in \mathfrak{H}$.

Të vërtetojmë tani pjesën e dytë. Le të jetë $qx = x'q' \in \mathfrak{H}H \cap H\mathfrak{H}$ ku $q, q' \in \mathfrak{H}$ dhe $x, x' \in H$. Vërejmë se:

$$r(qx) = qr(x) = qr(q) = r(q^2) = r(q);$$

dhe se po ashtu:

$$l(x'q') = l(x')q' = l(q')q' = l(q'^2) = l(q');$$

prej nga marrim se $qx = x'q' \in H$. Më tej shohim se:

$$r((qx)^2) = qxr(qx) = qxr(q) \text{ nga më sipër}$$
$$= (x'q')r(q) = (x'q')r(q') \text{ nga supozimet}$$

$$= x'r(q'^2) = x'r(q') \text{ sepse } q' \in \mathfrak{H}$$
$$= r(x'q') = r(qx);$$

e cila tregon se qx është $\mathcal{R}$-idempotent. Në mënyrë të ngjashme tregohet se

$x'q'$ është $\mathcal{L}$-idempotent gjë që përfundimisht sjell se $qx = x'q' \in \mathfrak{H}$

Në përfundim do të shohim edhe rastin e relacionit $\mathcal{B}$ të përkufizuar nga Kehayopulu tek (Kehayopulu, 1995). Është treguar tek (Pasku & Petro, 2007) se $\mathcal{B}$ është më fin se $\mathcal{H}$ dhe se në qoftë se një $\mathcal{B}$-klasë plotëson konditën e Grinit atëherë ajo është e rregullt dhe se përmban një element idempotent i cili në këtë rast është elementi bi ideal përfaqësues i $\mathcal{B}$-klasës. Këto do t'i shfrytëzojmë për të vërtetuar pohimin e mëposhtëm.

Teoremë 2.4. Në qoftë se një $\mathcal{B}$-klasë B plotëson konditën e Grinit, atëherë bashkësia $\mathfrak{B}$ e elementëve $\mathcal{B}$ idempotentë që ajo përmban formon nëngjysmëgrup të *S*. Për më tepër kemi që $B\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}B \subseteq \mathfrak{B}$.

Vërtetim. Le të jenë $x, y \in \mathfrak{B}$. Domethënë, $(x, y) \in \mathcal{B}$, $(x, x^2) \in \mathcal{B}$ dhe $(y, y^2) \in \mathcal{B}$. Tregojmë së pari se $xy \in B$ dhe më pas se $xy \in \mathfrak{B}$.

$$xyexy \vee xy = xxexy \vee xy \text{ sepse } y \in B = B_y \subseteq R_y = R_x$$

$=xxeyy \vee xy$ sepse $x \in B = B_x \subseteq L_x = L_y$

$=xey \vee xy$ $x.y \in \mathfrak{B} \subseteq B$ dhe se $B \subseteq R_x, L_y$

$$= xey = xex \text{ nga kondita e Grinit dhe se } B \subseteq L_x$$

$$= xex \vee x \text{ sepse } B \text{ është e rregullt.}$$

Së dyti shohim se:

$(xy)^2e(xy)^2 = (xyx)(yex)(yxy)$

$= (xyx)(xey)(yxy)$ $\quad y \in B \subseteq R_x \, dhe \, x \in B \subseteq L_y$

$= (xy)(xey)(xy)$ pasi $x, y \in \mathfrak{B}$

$= (xy)(yex)(xy)$ njëlloj si më sipër

$= x(yex)y = x(xey)y = xex = xex \vee x,$

që përfundon vërtetimin e pjesës së parë.

Për të vërtetuar pjesën e dytë së pari vemë re se çdo element $x\beta=\beta'x' \in$

$B\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}B$ i përket B. Vërtet,

$$b(x\beta) = (x\beta ex \vee x)\beta$$

$$= (\beta' x' e\beta' \vee x)\beta$$

$$= (\beta' \beta' e\beta' \vee x)\beta \text{ sepse } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R}$$

$$= (\beta' e\beta')\beta\beta' \in \mathfrak{B} \text{ dhe kondita e Grinit}$$

$$= (\beta e\beta)\beta(\beta', \beta) \in \mathcal{B}$$

$$= \beta e\beta = b(\beta)\beta \in \mathfrak{B}.$$

Tani të tregojmë se $(x\beta)^2 \in B$. Vërtet,

$$b((x\beta)^2) = (x\beta)(x\beta)e(x\beta)(x\beta)$$

$$= (x\beta)(\beta e\beta)(x\beta) \text{ nga më sipër}$$

$$= (x\beta)(\beta e\beta')(\beta' x') \qquad (\beta'\beta) \in \mathcal{B}$$

$$= x\beta^2 e\beta'^2 x' = x\beta e\beta' x' \qquad \beta, \beta' \in \mathfrak{B}$$

$$= \beta' x' ex\beta = \beta' \beta' e\beta\beta \text{ sepse } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R}$$

$$= \beta' e\beta\beta'\beta \in \mathfrak{B}$$

$$= \beta e\beta = b(x\beta);$$

që mbyll vërtetimin.

Literatura

Kehayopulu, N. (1989): On minimal quasi-ideal elements in *poe*-semigroups, Mathematica Japonica No 34:767-774

Kehayopulu, N. (1990): On Filters generated in *poe*-semigroups,Mathematica Japonica No 35: 789-796

Kehayopulu, N. (1995): Note on bi-ideals in ordered semigroups; PU.M.A. No 6: 333-344

Petro P, Pasku E. (2002): The Green –Kehayopulu relation $\mathcal{H}$ in le-semigroups. Semigroup Forum No 65: 33-42

Pasku, E., Petro, P. (2007): The relation $\mathcal{B}$ in *le*-semigroups. Semigroup Forum No 75: 427-437