FENOMENI I "NGADALËSIMIT KRITIK" NË SIMULIMET RRJETORE TË QCD

DAFINA HYKA (XHAKO).[1], RUDINA OSMANAJ (ZEQIRLLARI)[2]

[1]Universiteti Politeknik i Tiranës, Fakulteti i Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike, Departamenti i Inxhinierisë Fizike

[2]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Fizikës

e-mail: dafinaxhako@yahoo.com

Përmbledhje

Simetria kirale në QCD-në rrjetore është shumë e rëndësishme pasi kjo veti është thelbësore për bashkëveprimet e forta. Simulimet në rrjetë me fermione kirale kanë kosto të lartë llogaritëse për shkak të formës komplekse të operatorit që lidhet me to. Algoritmet standarte që përdoren në këto simulime vuajnë nga fenomeni i quajtur ngadalësim kritik. Sipas të cilit numri i iteracioneve të algoritmit shkallëzohet me inversin e masës së kuarkut. Me qëllim testimin e algoritmeve të reja që zgjidhin këtë problem kemi përdorur simulime të teorisë kalibruese rrjetore U(1) në dy përmasa, e cila ndan mjaft tipare dhe algoritme të përbashkëta me QCD-në rrjetore. Referuar algoritmit GMRESR i parakushtëzuar të propozuar në punën tonë të mëparshme, në këtë punim ne sjellim rezultatet e shkallëzimit të numrit të iteracioneve me masën e kuarkut deri në konvergjencën e këtij algoritmi të testuar për tre konstante çiftimi. Rezultatet janë krahësuar me një algoritëm tjetër optimal të përdorur në keto lloj simulimesh. Rezultoi se algoritmi GMRESR i parakushtëzuar shkallëzohet me të anasjelltën e rrënjës katrore të masës së kuarkeve në krahësim me ligjin invers proporcional të algoritmeve standarde. Në këtë mënyrë shmanget ai që quhet ngadalësim kritik i algoritmit për masa të lehta kuarkesh.

Fjalëkyçe: QCD, simulime, algoritme, kirale, ngadalësim kritik.

Abstract

Chiral symmetry in lattice QCD it is crucial property of the strong interactions. Lattice simulations with chiral fermions have high computational cost because of the complexity of the operator that is related to them. On the other hand, the main challenge in lattice QCD simulations are calculations with light quarks. The standard algorithms that are used in these simulations suffer from the critical slowing down problem. According to this phenomenon, the number of iterations of the algorithm is scaled with the inverse of the quark mass. In order to test new algorithms that solve this problem we used simulations of U(1) theory in two dimensions, which shares common features and algorithms with QCD. Referring the preconditioned GMRESR algorithm that we proposed in our previous work, in this paper we bring the results of the escalation in the number of iterations with the quark mass of this algorithm, tested for three coupling constants. The results are compared with another optimal algorithm used in these kinds of simulations. Our algorithm scaled by the inverse square root of the quark mass compared to the inverse proportional standard law.

Key words: simulations, algorithms, chiral, critical slowing down.

Hyrje

QCD është teoria e bashkëveprimeve të forta të kuarkeve dhe gluoneve. Problemi llogaritës është se QCD është një teori jolineare që nuk mund të zgjidhet analitikisht. Ndonëse për teorinë kuantike të fushës të forcave të dobëta si ato elektromagnetike, përafrimet që përdorin zbërthimet perturbative sipas forcës së bashkëveprimit japin rezultate shumë të sakta, bashkëveprimi në QCD është shumë i fortë dhe përafrimet perturbative nuk kanë dobi për energji të ulëta. Kjo çon në futjen e një përafrimi *jo-perturbativ* të bazuar në diskretizimin e hapësirë-kohës në një rrjetë të fundme, duke çuar në një formalizim të ri teorik të quajtur QCD-rrjetore, e cila mund të simulohet në kompjuter.

U propozua nga Wilson (1974) si një zgjidhje joperturbative e energjive të ulëta të QCD, duke diskretizuar hapësirë-kohën katërpërmasore në një rrjetë hiper-kubike me gjeometri Euklidiane (Montvay & Münster, 1997; Creutz, 1985; Smit, 2002; Rothe, 2005). Duke patur vetëm një numër të fundëm të nyjeve të rrjetës, madhësitë fizike mund të llogariten numerikisht duke zgjidhur një integral të rendeve të larta me metodat Monte Carlo (Creutz, 1980; Barkai *et.al.*, 1984).

Sipas formulimit rrjetor të teorisë QCD, në nyjet e rrjetës vendosen fushat e kuarkeve dhe në lidhjet bashkuese të tyre fushat gluonike. Një prej problemeve më të mëdha në zgjidhjen e QCD-së rrjetore në kompjuter është se simulimi i bashkëveprimit midis kuarkeve kërkon llogaritjen e përcaktorit të një matrice e cila ka kosto jashtëzakonisht të madhe kompjuterike. Nga pikëpamja fizike, ky përcaktor vjen nga dinamika e kuarkeve. Mënyra më e thjeshtë për të vazhduar me llogaritjet është ajo e neglizhimit të kësaj pjese pra dinamikës së kuarkeve dhe të punosh në përafrimin *“quenched”,(QQCD)* me vetëm shkallë lirie gluonike.

Futja e rrjetës është e vetmja mënyrë e njohur për të pasur një procedurë rinormimi invariant-kalibruese dhe jo-perturbative. Integrali i udhëve mund të përcaktohet plotësisht dhe të llogaritet numerikisht në rrjetë, ndërkohë rinormimi lejon të nxjerrësh rezultate të teorisë së vazhduar prej të dhënave rrjetore. QCD-ja rrjetore është rregulluar në mënyrë të natyrshme nga rrjeta, pra ajo nuk përmban infinitete siç gjenden në teorinë e vazhduar. Rezultatet jo-perturbative të marra prej QCD-së rrjetore i japin përgjigje pyetjeve fizike ku llogaritjet perturbative nuk munden.

Kiraliteti është një tipar i rëndësishëm që manifeston teoria e QCD-së. Simetria kirale është veti e rëndësishme fizike e cila duhet të reflektohet në formën e diskretizuar të operatorit të Dirakut në rrjetë, siç është operatori kiral i mbulimit (Narayanan & Neuberger, 1995; Neuberger, 1998), i cili ka kompleksitet të lartë llogaritës. Kështu, insistohet të ndërtohet në rrjetë një teori fermionike kirale, pasi teoritë rrjetore me kuarke kirale përbëjnë një teknikë të saktë për të studjuar fizikën e bashkëveprimeve të forta. Simetria kirale është ekzakte kur masat e fermioneve janë zero.

Materiali dhe metodat

Algoritmet standarde të invertimit të matricës së Dirak-ut në rrjetë vijnë nga nënhapësirat e Krylov-it (CG, CGNE, GMRES etj). Zgjidhësit e Krylov-it harxhojnë 50-90% të fuqisë kompjuterike në simulimet e QCD-së rrjetore. Në algoritme të tilla numri i iteracioneve shkallëzohet si (1/m) ku m-masa e kuarkeve ose koha e llogaritjes shkallëzohet me inversin e masës së kuarkeve e njohur ndryshe si ngadalësim kritik. Si rrjedhim lind nevoja e ndërtimit të një algoritmi invertimi për fermionet kirale që shmang ngadalësimin kritik. Një metodë për të reduktuar ngadalësimin kritik është përdorimi i parkushtëzuesve në algoritëm. Për parakushtëzuesit jo-polinomialë hapësira e Krylov-it nuk është më ajo fillestare. Për shembull le të jetë P një përafrim i matricës së anasjelltë të matricës origjinale A, në mënyrë që matrica PA të jetë më mirë e përcaktuar se A. Atëherë mund të zgjidhim në vënd të sistemit fillestar, sistemin

$$PAx = Pb$$

Një parakushtëzues i mirë fiton edhe kohë llogaritëse. Parakushtëzues të ndryshëm janë shpjeguar në (Boriçi, 2009). Me të njëjtën ide të zgjedhjes së një parakushtëzuesi propozojmë një algoritëm të ri të quajtur GMRESR i parakushtëzuar (Xhako & Boriçi 2014) si pjesë e QCDLAB 1.0. QCDLAB është një paketë funksionesh për kërkim dhe simulime numerike të QCD-së rrjetore. Ajo është një paketë e përbërë nga një grup funksionesh në MATLAB/OCTAVE e sjellë në dy versione QCDLAB 1.0 (Boriçi, 2006) dhe QCDLAB 1.1 (Boriçi, 2007). Simulimet me anë të QCDLAB 1.0 zhvillohen në teorinë kalibruese U(1) ose rasti i Elektrodinamikës Kuantike në rrjetë (Quantum Electrodynamics - QED) me dy dimensione. Teoria kalibruese U(1) me modelin e Schwinger-it në rrjetë (Melnikov & Weinstein, 2000; Rothe, 2005) ndan mjaft tipare dhe algoritme të njëjta me QCD-në. QED gjithmonë është përdorur si “mjedis laboratorik” për zhvillimin dhe testimin e algoritmeve të reja të propozuar. Me algoritmin e ri të propozuar janë kryer simulime numerike për 100 fusha kalibruese statistikisht të pavarura në teorinë kalibruese U(1). Konstantja e çiftimit e background-it kalibrues është testuar për tre vlera 1.0, 1.1, 1.2 në rrjetë me volum N1 x N2 = 32 x 32. Për secilën konstante çiftimi janë kryer simulime për masa kuarkesh në intervalin e vlerave në njësi rrjetore mq = [0.5, 0.45, 0.4, 0.35, 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01]. Të njëjtat llogaritje janë kryer me algoritmin optimal SHUMR (Boriçi & Allkoçi, 2006) i marrë për qëllim krahasimi. Një studim i rëndësishëm mbi efikasitetin dhe shpejtësinë e një algoritmi në simulimet numerike të QCD-së rrjetore është shkallëzimi i algoritmit me masën e kuarkut. Algoritmet standardë të nënhapësirave të Krylov-it siç u përmend dhe më sipër vuajnë nga fenomeni i quajtur ngadalësim kritik. Numri i iteracioneve (hapave) N të algoritmit shkallëzohet me masën e kuarkut si $N \sim 1/m_q$. Për këtë qëllim sjellim në këtë punim për secilin algoritëm, për secilën konstante çiftimi të testuar: kohën e invertimit të operatori të mbulimit (në sekonda) dhe numrin e iteracioneve (hapave) deri në konvergjencë.

Rezultatet dhe diskutimi

Për të studjuar shkallëzimin kemi ndërtuar grafikët e varësisë së numrit të hapave deri në konvergjencë nga masa e kuarkut.

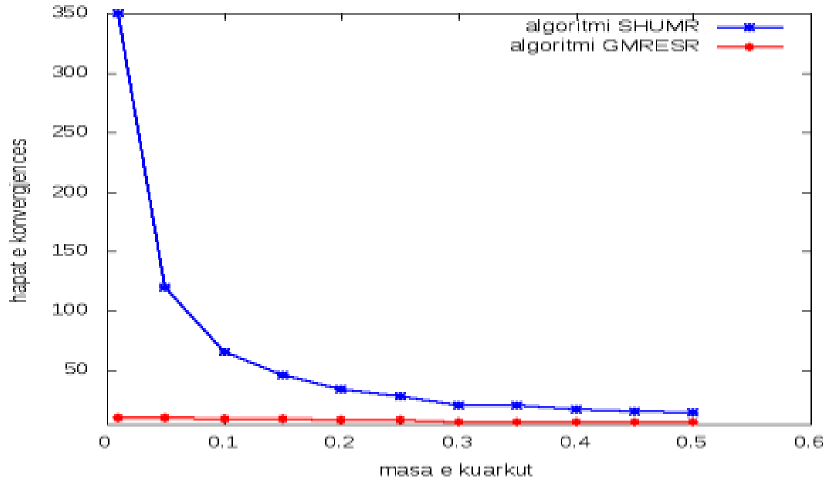

Figura 1. Varësia e numrit të iteracioneve deri në konvergjencë nga masa e kuarkut i algoritmeve GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çiftimi 1.0

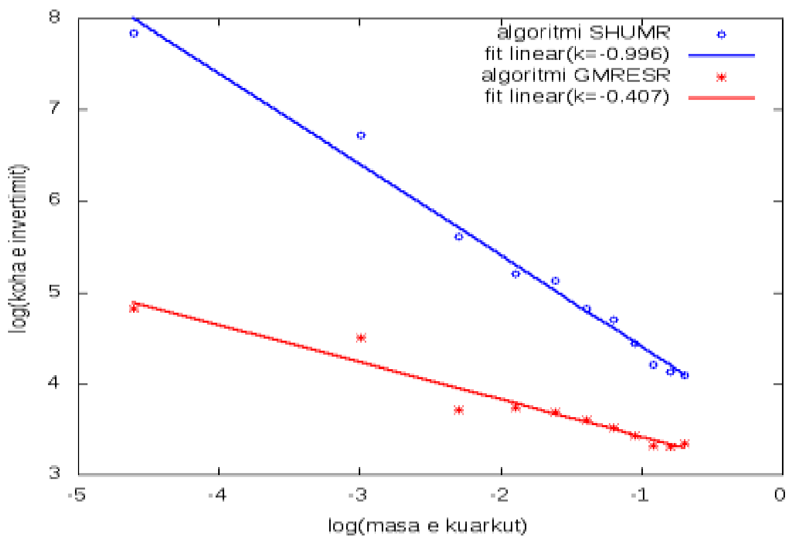

Figura 2. Varësia e kohës së invertimit (në sekonda) të operatorit kiral të mbulimit nga masa e kuarkut në shkallë logaritmike duke përdorur algoritmet GMRESR i

parakushtëzuar dhe SHUMR, në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çiftimi 1.0

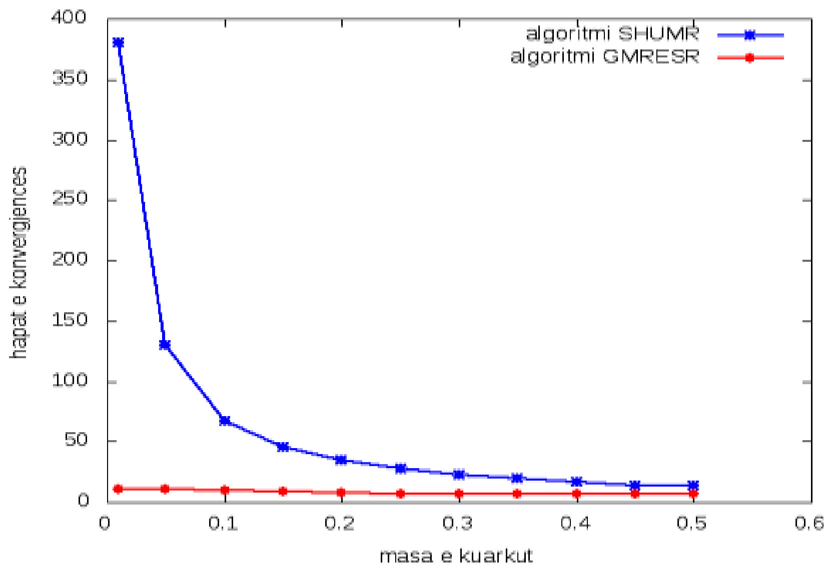

Figura 3. Varësia e numrit të iteracioneve deri në konvergjencë nga masa e kuarkut i algoritmeve GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çiftimi 1.2

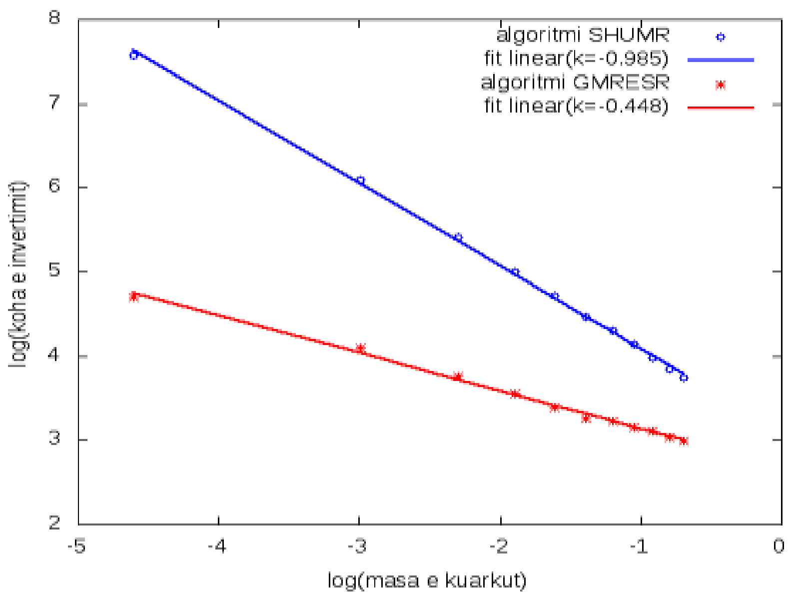

Figura 4. Varësia e kohës së invertimit (në sekonda) të operatorit kiral të mbulimit nga masa e kuarkut në shkallë logaritmike duke përdorur algoritmet GMRESR i

parakushtëzuar dhe SHUMR, në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çiftimi 1.2

Përfundime

Nga grafikët e paraqitur rezulton se numri i iteracioneve deri në konvergjencë i algoritmit të ri të zhvilluar GMRESR i parakushtëzuar përshkallëzohet si N~1/$\sqrt{m_q}$. Ky rezultat tregon se ***algoritmi i propozuar "zbut" ngadalësimin kritik.*** Nqse studjojmë varësinë e kohës së invertimit t (sek) për secilin algoritëm nga masa e kuarkut m_q. Kjo varësi mund të modelohet si t~m^k ose në shkallë logaritmike log (t)~k log (m_q). Një algoritëm invertimit do të ishte optimal për koefiçent k≅ 0, pra totalisht i pavarur nga masa e kuarkut. Në grafikët e varësisë së kohës së invertimit (në sekonda) të operatorit kiral të mbulimit nga masa e kuarkut në shkallë logaritmike duket qartë vlera që merr koefiçenti k për rastin e algoritmit tonë.

Falënderime

Në realizimin e këtij punimi, për kryerjen e simulimeve dhe llogaritjeve kompjuterike falënderojmë laboratorin e kompjuterave pranë Fakultetit të Teknologjisë së Informacionit, në UPT.

Literatura

Wilson K.G. (1974): Confinement of Quarks Phys. Rev. D10 2445

Boriçi A. (2006): QCDLAB: Designing Lattice QCD Algorithms with MATLAB, High Energy Physics - Lattice (hep-lat), arXiv:hep-lat/0610054

Boriçi A. (1999): Truncated Overlap Fermions: the link between Overlap and Domain Wall Fermions, in V. Mitrjushkin and G. Schierholz (edts.), Lattice Fermions and Structure of the Vacuum, Kluwer Academic Publishers, 2000, arXiv:hep-lat/9912040v1

Boriçi A. (2000): Lanczos approach to the inverse square root of a large and sparse matrix, J. Comp. Phys. 162, 123-131

Boriçi *A.* (2004): Computational methods for the fermion determinant and the link between overlap and domain wall fermions, QCD and Numerical Analysus III, Springer 2005, arXiv:hep-lat/0402035v1

Boriçi A. (2005): The two-grid algorithm confronts a shifted unitary orthogonal method, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 140, 850-852, hep-lat/0409078

Boriçi A., Allkoci A. (2006), A fast minimal residual solver for overlap fermions, High Energy Physics - Lattice (hep-lat), hep-lat/0602015

Boriçi A. (2007): Speeding up Domain Wall Fermion Algorithms using QCDLAB, Invited talk given at the 'Domain Wall Fermions at Ten Years', Brookhaven National Laboratory, arXiv:hep-lat/0703021

Narayanan R., Neuberger H. (1995): A construction of lattice chiral gauge theories, Nucl. Phys. B 443, 305

Neuberger H. (1998): Exactly massless quarks on the lattice, Phys. Lett. B 417 141, Phys. Rev. D 57, 5417

Xhako D., Boriçi A. (2011): Invertimi i operatorit të mbulimit me anë të algoritmit me dy rrjeta në QCD-në rrjetore, AKTET, Revistë Shkencore e Institutit Alb-Shkenca, ISSN 2073-2244

Xhako D., Boriçi A. (2014): Fast algorithms for simulating chiral fermions in U(1) lattice gauge theory, AJPA (American Journal of Physics and Application), ISSN: 2330-4308, Vol. 2, No. 2, 2014, pp. 67-72. doi: 10.11648/j.ajpa.20140202.15