NJË TEOREMË E TIPIT FUBINI PËR FUNKSIONET ME VLERA NË HAPËSIRAT KUAZI-BANAH

ENKELEDA (ZAJMI) KOTONAJ.

Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

e-mail:enkeleida.kallushi@fshn.edu.al

Përmbledhje

Në këtë material fillimisht fokusohemi tek produkti tensor i hapësirave të matshme $\left(X_i, V_i, v_i\right)$ ku V_i janë preunaza dhe v_i janë masat korresponduese në V_i. Kuptimi i hapësirës tensor produkt na lejon të shtrijmë kuptimin e bashkësisë së Fubinit Fub(Y) për funksionet Bochner të integrueshëm me vlera në hapësirën kuazi-Banah Y. Bazuar në vetitë e funksioneve të thjeshtë $f \in S(V,Y)$, ku $V = V_1 \otimes V_2$ është produkti tensor i familjeve V_i për i = 1,2, ndërtojmë një klasë funksionesh Bochner të shumueshëm f∈L(v,Y) për të cilët ka vënd një teoremë e ngjashme me teoremën Fubini për funksionet, por me kushtin që Y është hapësirë kuazi-Banah. Për të ndërtuar këtë klasë funksionesh, fillimisht kujtojmë se në rastin kur Y është hapësirë Banah në hapësirën L(V,Y) ka vend teorema e Lebegut mbi konvergjencën e dominuar e cila nuk është e vërtetë për rastin kur Y është hapësirë kuazi-Banah. Këtu kemi marrë një klasë funksionesh

A = $\left\{ f : X \to Y; \left| f \right| \in L(v_i, R) \Rightarrow f \in L(v_i, Y) \right\}$ ku $i \in \left\{1,2\right\}$ dhe $\left| f(x) \right| = \left\| f(x) \right\|_Y$. Për këtë klasë funksionesh mund të vërtetohet teorema e konvergjencës së dominuar, madje edhe teorema e tipit Fubini. Ky rezultat përbën edhe qëllimin kryesor të këtij punimi.

Fjalëkyçe: Integral i Bochner-it , produkti tensor i hapesirave, teorema Fubini.

Abstract

In this material we first focus on the tensor product of measurable spaces $\left(X_i, V_i, v_i\right)$ where V_i are prerings and v_i are corresponding measures in V_i. The meaning of the tensor product space allows us to extend the meaning of the Fubini set Fub (Y) for the Bochner integrable functions valued in the quasy-Banach Y space. Based on property of simple functions $f \in S(V,Y)$, where $V = V_1 \otimes V_2$ is the tensor product of family V_i for i = 1,2, we can construct a class of summable Bochner functions for which there is a theorem similar to the Fubini theorem for functions f∈L(v,Y), but under the condition that Y is the quasy-Banah space. To construct this class of functions, we recall that when Y is the Banach space in the space L (v, Y) there is a Lebesgue dominated convergence theorem which is not true of the case when Y is the quasy-Banah space. Here we have a class of functions, denoted

A = $\left\{ f : X \to Y; \left| f \right| \in L(v_i, R) \Rightarrow f \in L(v_i, Y) \right\}$ where $i \in \left\{1,2\right\}$ and $\left| f(x) \right| = \left\| f(x) \right\|_Y$. For this class of functions we can proof a type of Lebesgue dominated convergence theorem, even the Fubini type theorem. This result is also the main purpose of this paper.

Key words: Bochner integral, tensor product of spaces, Fubini theorem.

Hyrje

Teoremat e Fubinit për integralet e Lebegut dhe Bochnerit në rastin e funksioneve me vlera ne hapësirat e Banahut, janë rezultate me mjaft interes në analizën funksionale. Ne kërkojmë që të përgjithësojmë këto teorema në rastin kur funksionet janë me vlera në hapësirat kuazi-Banah. Për këtë fillimisht vëmë në dukje se hapësirat në të cilat janë përcaktuar funksionet për të cilat kryhet studimi janë produkt tensor hapësirash të matshme. Këto hapësira janë gjithashtu hapësira të matshme. Në qendër të vëmendjes sonë është mënyra se si do të mund të përcaktojmë bashkësinë Fub(Y) të funksioneve Bochner të integrueshëm për të cilët garantohet vërtetësia e një teoreme të ngjashme me atë të Fubinit në rastin kur Y është hapësirë Banah.

Kjo e fundit realizohet duke marrë klasën e funksioneve të përmendur më sipër. Për këtë klasë funksionesh mund të vërtetohet teorema e konvergjencës së dominuar, madje edhe teorema e tipit Fubini.

Njohuri paraprake

Supozojmë se X është një hapësirë abstrakte dhe V një familje e nënbashkësive të X që përmban bashkësinë boshe. Shënojmë S(V) familjen e gjithë nënbashkësive të X që janë bashkime të fundme bashkësish joprerëse nga familja V. Kjo familje quhet familje e bashkësive të thjeshta të gjeneruar nga familja V.

Familja V formon një preunazë në hapësirën X në qoftë kënaq kushtet: Në qoftë se $A_1, A_2 \in V$ atëherë njëkohësisht $A_1 \cap A_2$ dhe $A_1 - A_2$ bëjnë pjesë në familjen S (V).

Le të jetë Y një hapësirë kuazi e normuar. Shënojmë S (V,Y) hapësirën e funksioneve të formës $h = y_1\chi_{A_1} + y_2\chi_{A_2} + ... + y_k\chi_{A_k}$ ku $y_i \in Y$, $A_i \in V$ dhe χ_{A_i} janë funksione karakteristikë në bashkësitë joprerëse A_i .Kjo familje quhet familje e funksioneve të thjeshtë të gjeneruar nga preunaza V.

Vargu i funksioneve $s_n \in S(V,Y)$ quhet varg bazë në qoftë se gjenden funksionet $h_n \in S(V,Y)$ dhe një konstante pozitive M e tillë që $s_n = h_1 + h_2 + ... + h_n$, ku $\|h_n\| \le M(4K)^{-n}$ për n=1,2,… dhe K është moduli i konkavitetit të hapësirës Y.

Supozojmë se (X,V,v) është një hapësirë e matshme mbi preunazën V dhe Y është një hapësirë kuazi-Banah. Shënojmë L (v,Y) hapësirën e funksioneve f:X→Y për të cilët gjendet një varg bazë $s_n \in S(V,Y)$ që konvergjon pothuajse kudo tek funksioni f.Kjo hapësirë quhet hapësira e funksioneve Bochner të shumueshëm dhe nëse Y=R atëherë L(v,R) quhet hapësira e funkiosneve Lebeg të shumueshëm.

Le të jenë $\left(X_i, V_{i,} v_i\right)$ hapësira të matshme, ku V_i janë preunaza. Konsiderojmë prodhimin kartezian $X_1 \times X_2$. Mbi produktin tensor $V_1 \otimes V_2 = \left\{A_1 \times A_2 : A_1 \in V_1, A_2 \in V_2\right\}$ të familjeve V_i të bashkësive, përcaktojmë funksionin bashkësior $v_1 \otimes v_2(A_1 \times A_2) = v_1(A_1) \cdot v_2(A_2)$; $\forall A_i \in V_i (i = 1, 2)$. Treshja (X,V,v), ku $X = X_1 \times X_2, V = V_1 \otimes V_2, v = v_1 \otimes v_2$, formon një hapësirë të matshme pozitive (V.Bogdan 2010). Kjo hapësirë quhet hapësirë produkt tensor. Me metodën e induksionit matematik mund të përgjithësohet se produkti tensor i një sasie të fundme hapësirash të matshme është hapësirë e matshme.

Le të jenë $f : X_1 \times X_2 \to Y$, Y një hapësirë kuazi-Banah dhe $x_1 \in X_1$ një element i fiksuar. Shënimi $f(x_1, .)$ paraqet funksionin $x_2 \to f(x_1, x_2)$.

Përkufizim 1

Shënojmë me Fub(Y) bashkësinë e funksioneve Bochner të integrueshëm $f \in L(v, Y)$, për të cilët gjendet një bashkësi C nul për v_1 dhe një funksion $h \in L(v_1, Y)$ i tillë që $f(x_1, .) \in L(v_2, Y)$ dhe $h(x_1) = \int f(x_1, x_2) v_2(dx_2)$ në qoftë se $x_1 \notin C$, për më tepër $\int f dv = \int h dv_1 = \int (\int f(x_1, x_2) v_2(dx_2)) v_1 d(x_1)$. (me shënimin $\int f(x) v d(x)$ kuptojmë $\int f dv$)

Nga lineariteti i integralit të Bochnerit (E.Zajmi Kotonaj 2008) rrjedh se bashkësia Fub(Y) është lineare. Madje njëlloj si në (V.Bogdan 2010) tregohet lehtë se bashkësia e funksioneve të thjeshtë (V,Y) $\subset$ Fub(Y).

Rezultate

Në qoftë se Y është një hapësirë Banah atëherë integrueshmëria e funksionit f:X$\to$Y sjell integrueshmërinë e |f| dhe për më tepër nëse funksioni f është i matshëm ka vend edhe e anasjellta.(Bogdanowicz, 1965). Ndryshe nga rasti kur Y është hapësirë e normuar, në këtë rast jo gjithnjë integrueshmëria e |f| garanton integrueshmërinë e funksionit f edhe pse ky i fundit është funksion i matshëm. Kjo pasi në rastin kur Hapësira Y është e kuazi normuar nuk është i vërtetë mosbarazimi $\left|\int f dv\right| \le \int \left|f\right| dv$.

Shënojmë me A = $\left\{f : X \to Y ; \left|f\right| \in L(v_i, R) \Rightarrow f \in L(v_i, Y)\right\}$ ku $i \in \left\{1, 2\right\}$ dhe $\left|f(x)\right| = \left\|f(x)\right\|_Y$. Le të tregojmë se klasa e funksioneve A është jo boshe.

Pohim 2

Koleksioni i funksioneve të thjeshtë S(V,Y) përfshihet në koleksionin A.

Vërtet

Është e qartë nga përkufizimi i funksioneve të thjeshtë se: Në qoftë se f$\in$S(V,Y) $\subset$ L(v,Y) atëherë g = |f|$\in$S(V,R) $\subset$ L(v,R). E anasjellta jo gjithmonë është e vërtetë, por vetëm nëse bashkësia e vlerave të funksionit f është e fundme. Kështu që, në qoftë se funksioni f∈S(V,Y) atëherë $f = y_1\chi_{A_1} + y_2\chi_{A_2} + ... + y_k\chi_{A_k}$ ku $A_i = A_{i_1} \times A_{i_2}$ për i=1,2…k, dhe si rrjedhim $f(x_1,.) = y_1\chi_{B_1} + y_2\chi_{B_2} + ... + y_k\chi_{B_k}$ ku $B_i = \{x_1\} \times A_{i_2}$ për i=1,2…k. Prandaj $|f(x_1,.)| = |y_1|\chi_{B_1} + |y_2|\chi_{B_2} + ... + |y_k|\chi_{B_k} \in S(V_2, R)$ dhe $f(x_1,.) \in S(V_2, Y)$. Pra ka vend relacioni S(V,Y) ⊂ A..▪

Po japim tani shembullin e një funksioni jo të thjeshtë që bën pjesë në koleksionin A.

Shembull 3

Le të jenë X_1=[a,b]⊂R dhe X_2 një bashkësi e çfarëdoshme. Konsiderojmë hapësirën tensor produkt (X,V,v), ku $X = X_1 \times X_2, V = V_1 \otimes V_2, v = v_1 \otimes v_2$, dhe V_i janë preunaza në X_i. Le të jenë f një funksion me vlera reale i vazhdueshëm në segmentin [a,b] dhe g∈S(V_2,Y). Ndërtojmë funksionin F(x,y) = f(x)g(y).

▪Së pari vërejmë se funksioni F bën pjesë në koleksionin L(v,Y).

Meqë funksioni f është i vazhdueshëm në segmentin [a,b] atëherë ky funksion është Lebeg i integrueshëm, pra gjendet një varg bazë s_n(x) që konvergjon p.k sipas masës v_1 tek funksioni f(x) . Gjithashtu, meqë S(V_2,Y)⊂L(v_2,Y) gjendet një varg bazë t_n(y) i cili konvergjon p.k sipas masës v_2 tek funksioni g(y). Vargu s_n(x)t_n(y) është varg bazë në S(V,Y) i cili konvergjon tek funksioni F p.k sipas masës v.

Vërtet

Për çdo dy funksione të thjeshtë $h = x_1\chi_{A_1} + x_2\chi_{A_2} + ... + x_k\chi_{A_k}$ dhe $t = y_1\chi_{B_1} + y_2\chi_{B_2} + ... + y_l\chi_{B_l}$ kemi $ht = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} x_i y_j \chi_{A_i \times B_j}\right)$ atëherë funksioni ht është funksion i thjeshtë. Prandaj s_n(x)t_n(y) është varg funksionesh të thjeshtë dhe për më tepër $s_n = h_1 + h_2 + ... + h_n$ ku $\|h_n\| \le M_1 4^{-n}$ për n=1,2,… dhe $t_n = g_1+g_2+…+g_n$ ku $\|g_n\| \le M_2(4K)^{-n}$ për n=1,2,…, dhe si rrjedhim kemi $\|s_n(x)g_j(y)\| = \int|s_n(x)g_j(y)|dv = \|s_n\|\cdot\|g_j\| \le M_1 (4^{-1}+4^{-2}+…+4^{-n}) \cdot M_2(4K)^{-j} < M_1M_2(4K)^{-j}$ për j=1,2,…,n. (kemi parasysh se norma $\|s_n\|$ është vlera absolute sepse ky varg është varg nmumerik.)

Të tregojmë se vargu s_n(x)t_n(y) konvergjon tek funksioni F(x,y) p.k sipas masës v.

Meqë vargu numerik s_n(x) konvergjon p.k sipas masës v_1 tek funksioni f(x), për çdo ε > 0 gjendet numri natyror n_1 i tillë që për çdo n>n_1 dhe për çdo x∉A_1 ku $v_1(A_1)$ = 0 ka vend mosbarazimi $|s_n(x)-f(x)| < ε$.

Gjithashtu, vargu t_n(y) konvergjon p.k sipas masës v_2 tek funksioni g(y). Kështu që, për çdo ε > 0 gjendet numri natyror n_2 i tillë që për çdo n>n_2 dhe për çdo y∉A_2 ku $v_2(A_2)$ = 0 ka vend mosbarazimi $|t_n(y)-g(y)| < ε$.

Janë të vërteta mosbarazimet:

$|F(x,y) - s_n(x)t_n(y)| = |f(x)g(y) - s_n(x)t_n(y)| \leq K(|f(x)g(y) - f(x)t_n(y)| + |f(x)t_n(y) - s_n(x)t_n(y)|) = K(|f(x)|\cdot|g(y)-t_n(y)| + |t_n(y)|\cdot|f(x)-s_n(x)|)$

Meqë funksioni f është i vazhdueshëm në segment atëherë ai është i kufizuar, pra gjendet një konstante M_1 e tillë që $|f(x)|\leq M_1$ për çdo $x\in X_1$. Nga ana tjetër $|t_n(y)|\leq K(|g(y)-t_n(y)|+|g(y)|) < K(\varepsilon + M_2)$ ku M_2 është një kufi i sipërm i funksionit me vlera të fundme $|g(y)|\in S(V_2,R)$ dhe $n>n_2$ $y\notin A_2$ me masë $v_2(A_2) = 0$.

Në këto kushte $|F(x,y) - s_n(x)t_n(y)| \leq K\ [M_1\varepsilon + K(\varepsilon + M_2)\varepsilon] = \varepsilon'$, për çdo $n>\max(n_1,n_2)$ dhe $(x,y)\notin A_1\times A_2 = A$ dhe $v(A) = v_1(A_1)v_2(A_2) = 0$.▪

Nga ana tjetër $|fg|(x_1,.) = M|g(y)|$ ku $M=|f(x_1)|$ është konstante, prandaj $|fg|(x_1,.) \in L(v_2,R)$. Njëlloj $|fg|(.,y_1) = M|f(x)|$ ku $M=|g(y_1)|$ është konstante, prandaj $|fg|(.,y_1) \in L(v_1,R)$.

Vërejmë gjithashtu se, $fg(x_1,.) = Mg(y)\in S(V_2,Y) \subset L(v_2,Y)$ ku $M=f(x_1)$ është një konstante reale. Nga ana tjetër $fg(.,y_1) = zf(x)$ ku $z = g(y_1)$ është një element i fiksuar në Y. Duke arsyetuar njëlloj si në rastin kur treguam se vargu $s_n(x)t_n(y)$ konvergjonte tek funksioni F, tregohet se vargu $zs_n(x)$ është varg bazë që konvergjon tek funksioni $fg(.,y_1)$ p.k sipas v_1, prandaj $fg(.,y_1)\in L(v_1,Y)$.

Pra treguam se funksioni $F(x,y)\in A$.

Gjithashtu vërtejmë se:

Pohim 4

Koleksioni A është nënhapësirë lineare e hapësirës L(v,Y).

Vërtetim

Për funksionet $f,f_1,f_2\in A$ është i vërtetë relacioni

$\left|f_1(x_1,.)\right|,\left|f_2(x_1,.)\right| \in L(v_2,R) \Rightarrow f_1(x_1,.),\ f_2(x_1,.) \in L(v_2,Y) \subset L(v,Y)$ ose

$\left|f_1(.,x_2)\right|,\left|f_2(.,x_2)\right| \in L(v_1,R) \Rightarrow f_1(.,x_2),\ f_2(.,x_2) \in L(v_1,Y) \subset L(v,Y)$.

Gjithashtu nga vetitë që gëzon kuazi-norma në Y mund të shkruajmë se:

$\left|f_1(x_1,.)\right|,\left|f_2(x_1,.)\right| \in L(v_2,R) \Rightarrow \left|f_1(x_1,.)+f_2(x_1,.)\right| \in L(v_2,R)$ dhe meqë

$f_1(x_1,.),\ f_2(x_1,.) \in L(v_2,Y) \subset L(v,Y) \Rightarrow f_1+f_2 \in L(v,Y)$. Po ashtu është e qartë se $\left|kf\right| \in L(v,R) \Rightarrow kf \in L(v,Y)$ për çdo $k\in R$. ▪

Le të jenë Y një hapësirë kuazi-Banah, $\left(X_i,V_{i,}v_i\right)$ për i=1,2 hapësira të matshme mbi preunazat V_i dhe (X,V,v) hapësira tensor produkt $(X_1\times X_2, V_1\otimes V_2, v_1\otimes v_2)$.

Ka vend kjo teoremë.

Teoremë 5 (e tipit Fubini)

Çdo funksion f∈A bën pjesë në familjen Fub(Y).

Vërtetim

Marrim një funksion f∈A të çfarëdoshëm. Meqë f∈L(v,Y) atëherë gjendet një varg bazë $(s_n)_{n\in N}$ i cili konvergjon p.k sipas v tek funksioni f. Le të marrim vargun me vlera reale $g_n(x) = K|h_1(x)| + K^2|h_2(x)| + ... + K^n|h_n(x)|$, ku $h_i(x)$ për i=1,…,n janë funksionet e thjeshtë që marrin pjesë në paraqitjen e $s_n(x)$ dhe K është moduli i konkavitetit të Y. Vërejmë se $g_n \in S(V,R)$ sepse për çdo i=1,2,…,n ka vend mosbarazimi

$$\left\|K^i h_i\right\| = \int K^i |h_i| dv = K^i \|h_i\| \le \frac{MK^i}{4^i K^i} = \frac{M}{4^i}$$

dhe

$$\begin{aligned}&\int g_n dv = \int K|h_1(x)|dv + \int K^2|h_2(x)|dv ... + \int K^n|h_n(x)|dv \\ &< \frac{M}{4} + \frac{M}{4^2} + ... + \frac{M}{4^{n-1}} = M\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{4^s} < \frac{M}{3} = M'\end{aligned}$$

Nga ana tjetër vargu g_n është varg monoton jozvogëlues dhe vargu i integraleve korrespondues është i kufizuar nga sipër nga numri M'. Në L(v,R) ka vend teorema e konvergjencës monotone (Bogdan, 2010) sipas së cilës gjendet një funksion g∈ L(v,R) i tillë që vargu g_n konvergjon p.k sipas v tek funksioni g dhe për më tepër $\int gdv = \lim_{n\to\infty}\int g_n dv$.

Meqë S(V,R) ⊂ Fub(R) kemi që $g_n \in Fub(R)$ dhe si rrjedhim g⊂Fub(R). (Fub(R) është e mbyllur nën konvergjencën monotone p.k sipas v (V.Bogdan 2010)) Gjithashtu p.k sipas v dhe për çdo n∈N, janë të vërteta mosbarazimet

$$\begin{aligned}&|s_n(x)| \le K|h_1(x)| + K(|h_2(x)| + ... + |h_n(x)|) \le \\ &K|h_1(x)| + K^2|h_2(x)| + K(|h_3(x)| + ... + |h_n(x)|) \le ... \\ &\le K|h_1(x)| + K^2|h_2(x)| + ... + K^n|h_n(x)| = g_n(x) \le g(x)\end{aligned}$$

Prandaj gjendet një bashkësi A nul sipas v e tillë që $|s_n(x)| \le g(x), \forall x \notin A$ dhe n∈N, dhe për më tepër $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ në qoftë se x∉A.

Shënojmë C_1 një bashkësi nul për v_1 të tillë që prerjet $A(x_1) = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\}$ të bashkësisë A janë nul për v_2 në qoftë se $x_1 \notin C_1$.(V.Bogdan 2010) Meqë g∈Fub(R) atëherë gjenden bashkësia C_2 nul për v_1, funksioni $h \in L(v_1, R)$ të tillë që $g(x_1,.) \in L(v_2, R)$, $h(x_1) = \int g(x_1,.)dv_2$ në qoftë se $x_1 \notin C_2$ dhe $\int hdv_1 = \int gdv$. Marrim

$x_1 \notin C_1 \cup C_2 = C$ të çfarëdoshëm. Për çdo $x_2 \notin A(x_1)$ dhe n$\in$N është i vërtetë mosbarazimi $|s_n(x_1,x_2)| \leq g(x_1,x_2)$ .Nga ana tjetër vargu $s_n(x_1,.)$ është varg bazë në $L(v_2,Y)$ dhe si rrjedhim gjendet një funksion s:X$\rightarrow$Y i tillë që $s_n(x_1,.)$ konvergjon tek funksioni $s(x_1,.)$ p.k sipas v2.(E.Zajmi Kotonaj 2015)

Kështu që, për çdo ε > 0 gjendet një $n_0 \in N$ e tillë që për çdo $n \geq n_0$ dhe për çdo $x_2 \notin X_2 - A_2$ ku $v_2(A_2) = 0$ ka vend mosbarazimi $|s_n(x_1,.) - s(x_1,.)| < \varepsilon$. Pra arrijmë në përfundimin që për çdo $x_1 \in X_1$ dhe për çdo $x_2 \notin A_2$ kemi që $|s_n(x_1,x_2) - s(x_1,x_2)| < \varepsilon$ .Mosbarazimi i fundit nuk është i vërtetë në bashkësinë $A = A_1 \times A_2$ ku $v_2(A_2) = 0$ dhe si rrjedhim $v(A_1 \times A_2) = 0$. Domethënë vargu $s_n(x_1,x_2)$ konvergjon tek $s(x_1,x_2)$ p.k sipas v. Nga ana tjetër vargu $s_n(x_1,x_2)$ konvergjon tek $f(x_1,x_2)$ p.k sipas v. Kjo e fundit na çon në përfundimin që funksionet $f(x_1,x_2)$ dhe $s(x_1,x_2)$ janë p.k të barabartë sipas v.

Shënojmë në B bashkësinë ku funksionet f dhe s kanë vlera të ndryshme. Bashkësia $B = B_1 \times B_2$ ku ose $v_1(B_1) = 0$ ose $v_2(B_2) = 0$. Vërejmë se bashkësia $D = B_1 \times (A_2 \cup B_2)$ e ka masën v(D)=0, ndërkaq për çdo $(x_1,x_2) \in X - D$ janë të vërtet mosbarazimet

$$\begin{aligned} &|s_n(x_1,.) - f(x_1,.)| \leq K(|s_n(x_1,.) - s(x_1,.)| + |s(x_1,.) - f(x_1,.)|) \Rightarrow \\ &|s_n(x_1,.) - f(x_1,.)| \leq K|s_n(x_1,.) - s(x_1,.)| \end{aligned} .$$

Kështu që vargu $s_n(x_1,.)$ konvergjon tek funksioni $f(x_1,.)$ p.k sipas v2. Prandaj funksionet $s_n(x_1,.)$ dhe $f(x_1,.)$ janë p.k të barabartë sipas v2, dhe si rrjedhim funksionet $|f(x_1,.)| = |s(x_1,.)|$ p.k sipas masës v2.

Është i vërtetë mosbarzimi: $|s(x_1,.)| - K|s_n(x_1,.)| \leq K|s_n(x_1,.) - s(x_1,.)|$ ose $K|s_n(x_1,.)| - |s(x_1,.)| \geq -K|s_n(x_1,.) - s(x_1,.)|$ .Kështu që duke kaluar në limit për n që tenton në +∞ kemi: $\frac{1}{K}|s(x_1,.)| \leq g(x_1,.)$. Në këto kushte funksioni $|s(x_1,.)| \in L(v_2,R)$. Meqë funksioni f$\in$A atëherë $f(x_1,.) \in L(v_2,Y)$. Si rrjedhim vargu $\overline{s_n}(x_1,.) = \int s_n(x_1,.)dv_2$ konvergjon tek $\int f(x_1,.)dv_2$ p.k sipas v2. Nga ana tjetër mund të tregohet lehtë se vargu $\overline{s_n}(x_1,.) = \int s_n(x_1,.)dv_2$ është varg bazë në hapësirën $L(v_1,Y)$ dhe si rrjedhim gjendet një funksion $\overline{s}$ tek I cili ky varg konvergjon p.k sipas v1. Njëlloj si më lart tregohet se funksionet $\overline{s}$ dhe $\overline{f}(x_1) = \int f(x_1,.)dv_2$ janë p.k të barabartë sipas v.

Nga ana tjetër

$$\left|\overline{s_n}(x_1)\right| = \left|\int s_n(x_1,.)dv_2\right| \le K\int\left|h_1(x_1,.)\right|dv_2 + ... + K^n\int\left|h_n(x_1,.)\right|dv_2)$$
$$= \int g_n(x_1,.)dv_2$$

Prandaj me arsyetime të ngjashme si më lart tregohet se $\overline{f}(x_1) = \int f(x_1,.)dv_2 \in L(v_1,Y)$.

Për më tepër $\int \overline{f}dv_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\int\overline{s_n}dv_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\int s_n dv = \int fdv$, dhe si rrjedhim f$\in$Fub(Y).

Literatura

Bogdan.V (2010):Generalized vectorial Lebesgue and Bochner integration theory, arXiv:1006.3881V1[math.FA]:1-85

Bogdanowicz.W.M (1965): A generalization of Lebesgue –Bochner-Stieltjes integral and a new approach to the theory of integration, Proc. Of Nat.Acad.Sci.USA,Vol.53,No.3:492-498

Zajmi Kotonaj (Kallushi).E (2008): Mbi disa përgjithësime të funksionit normë dhe integrali i Bochner-it në hapësirat kuazi të normuara", Buletini i Shkencave Natyrore, Nr.5, 2008; 43-53

Zajmi Kotonaj.E (2015): Some generalized vectorial Lebesgue and Bochner integration theory on quasy-Banach space, Fisrt International Conference ‘‘Mathematics days in Tirana’’, 11-12 December 2015, Proceedings book, ISBN: 978-9928-4329-0-2; 105-110