NJË TEOREMË MBI PIKAT FIKSE TË PËRBASHKËTA PËR DY FUNKSIONE TË KLASËS SË SIPËRME KONIKE $(\mathcal{F}, h)$ NË HAPËSIRAT KON b-METRIKE PJESËRISHT TË PJESSHME TË DOBËTA

ERIOLA SILA[1], SILVANA LIFTAJ[2], KUJTIM DULE[3]

[1,3]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

[2]Universiteti "Aleksandër Moisiu", Durrës, Fakulteti i Teknologjisë së Informacionit, Departamenti i Matematikës

e-mail: erjola.liftaj@fshn.edu.al

Përmbledhje

Le të jetë (X, q_w) një hapësirë kon b-metrike pjesërisht e pjeshme e dobët. Në këtë punim është dhënë një teoremë që vërteton ekzistencën dhe unicitetin e një pike fikse të përbashkët për dy funksione të klasës së sipërme konike $(\mathcal{F}, h)$ në hapësirën X. Si rrjedhim i këtij rezultati, janë përftuar disa teorema mbi pikat fikse të përbashkëta për disa lloje kontraksionesh. Rezultatet e përftuara përgjithësojnë disa rezultate të pikave fikse në hapësirat metrike të pjesshme të dobëta. Teorema kryesore e punimit është shoqëruar me një shembull i cili nxjerr anën zbatuese të saj.

Fjalëkyçe: Hapësirë kon b-metrike pjesërisht e pjesshme e dobët, pikë fikse, klasë konike e sipërme, funksion krahasues, varg Cauchy.

Abstract

Let (X, q_w) be a weak-partial quasi cone b-metric space. In this paper is given a theorem which assure the existence and uniqueness of a common fixed point of two functions of $(\mathcal{F}, h)$ cone upper class in X. As a sequence of this result, there are obtained some common fixed point theorems for different types of contractions. The gained results generalize some theorems in weak partial metric space. The highlight theorem of this paper is illustrated by an example which shows the applicative side of it.

Key words: Weak-partial quasi cone b-metric space, fixed point, cone upper class, comparison function, Cauchy sequence.

Hyrje

Hapësirat kon metrike u studiuan për herë të parë nga Huang dhe Zhang në (2007). Ata zgjeruan hapësirat metrike në hapësira kon metrike duke zëvendësuar drejtëzën reale me një hapësirë të Banach-ut, në të cilat studiuan pikat fikse që plotësojnë kontraksionin e Banach-ut dhe disa kontraksione të tjera. Mathew (1992) kontribuoi në fushën e Analizës duke prezantuar hapësirat metrike të pjesshme. Shumë autorë si Valero (2005), Altun dhe Erduran (2011), etj, punuan në lidhje me pikat fikse në këto hapësira.

Në 1999, Heckmann *et.al* përkufizuan në punimin e tyre hapësirat metrike të pjesshme të dobëta, dhe në vijim te këtij studimi, autorë si Aydi *et.al* (2018), Barakat *et.al* (2017), Durmaz *et.al* (2013), Kanwal *et.al* (2019), kanë dhënë një kontribut të rëndësishëm në studimin e pikave fikse në hapësirat metrike të pjesshme të dobëta. Barakat *et.al* (2017) i zgjeruan këto hapësira në hapësirat metrike pothuajse të pjesshme të dobëta.

Sila *et.al* (2021) dhanë konceptin e hapësirave kon b-metrike pjesërisht të pjesshme të dobëta. Në punim u studiuan disa veti topologjike të këtyre hapësirave të reja dhe u dhanë disa rezultate në lidhje me pikat fikse për kontraksione jolineare në këto hapësira.

Sila *et.al* (2020) paraqitën konceptin e funksioneve të klasës së sipërme konike $(\mathcal{F}, h)$ në hapësirat kuazi kon metrike. Ata vërtetuan ekzistencën dhe unicitetin e pikave fikse për këto lloje funksionesh duke përdorur diametrin e orbitave në hapësirat kuazi kon metrike.

Në këtë punim, studiohen ekzistenca dhe uniciteti i pikave fikse të përbashkëta për dy funksione të cilat i përkasin klasës së sipërme konike $(\mathcal{F}, h)$ në hapësirën kon b-metrike pjesërisht të pjesshme të dobëta. Rezultatet e treguara ne punim janë përgjithësim i disa rezultateve të fituara më parë në hapësirat metrike, kon metrike dhe hapësirat metrike e pjesshme të dobëta.

Përkufizimet e mëposhtëme në lidhje me konin dhe hapësirën konike, janë dhënë nga (Huang dhe Zhang 2007).

Përkufizim 1.1. (Huang, Zhang, 2007) Le të jetë E një hapësirë reale e Banach-ut dhe P një nënbashkësi e E. P quhet kon nëse ajo plotëson kushtet e mëposhtëme:

1. P është e mbyllur, $P \neq \emptyset, P \neq \{0\}$;
2. Për çdo $x, y \in P, \alpha x + \beta y \in P$, ku $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$;
3. Në qoftë se $x \in P$ dhe $-x \in P$ atëherë $x = 0$.

Le të jetë $P \subset E$ një kon. E pajisim konin P me një relacion renditje " $\leq$ " të dhënë nga $x \leq y$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $y - x \in P$. $x < y$ në qoftë se $x \leq y$dhe $x \neq y$, kurse $x \ll y$ do të kuptojmë nëse $y - x \in \operatorname{int} P$, ku $\operatorname{int} P$ shënohet brendia e P.

Koni P quhet normal nëse ekziston një numër pozitiv $K > 0$ për të cilin plotësohet kushti: nëse $0 \leq x \leq y$, atëherë $\|x\| \leq K\|y\|$, për çdo $x, y \in P$. Numri më i vogël pozitiv K, i cili plotëson kushtin e mësipërm quhet konstante e normalitetit e P.

Përkufizim 1.2. (Huang dhe Zhang 2007). Le të jetë X një bashkësi e ndryshme nga bashkësia boshe. Pasqyrimi $d: X \times X \rightarrow E$, i cili plotëson kushtet e mëposhtëme:

1. $0 \leq d(x,y)$ për çdo $x,y \in X$ dhe $d(x,y) = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = y$;

2. $d(x,y) = d(y,x)$, për çdo $x,y \in X$;

3. $d(x,y) \leq s(d(x,z) + d(z,y))$, për çdo $x,y,z \in X$,

quhet kon metrikë në X. Çifti i renditur (X,d) quhet hapësirë kon metrike.

Përkufizim 1.3. (Heckmman, 1999) Le të jetë M një bashkësi e ndryshme nga bashkësia boshe. Pasqyrimi $\rho: M \times M \to R^+$ *q*uhet metrikë e pjesshme e dobët, në qoftë se ai plotëson kushtet e mëposhtëme:

1. $\rho(s,s) = \rho(s,t)$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $s = t$, për çdo $s,t \in M$;
2. $\rho(s,s) \leq \rho(s,t)$, për çdo $(s,t) \in M^2$;
3. $\rho(s,t) = \rho(t,s)$, për çdo $(s,t) \in M^2$;
4. $\rho(s,t) \leq \rho(s,z) + \rho(z,t)$, për çdo $s,t,z \in M$.

Çifti i renditur (M,ρ) quhet hapësirë metrike e pjesshme e dobët.

Përkufizim 1.4. (Abdelajawad *et.al* 2011) Le të jetë M një bashkësi e ndryshme nga bashkësia boshe. Pasqyrimi $q: M \times M \to R^+$ quhet metrikë e pjesshme e dobët, në qoftë se ai plotëson kushtet e mëposhtëme:

1. $q(s,s) = q(s,t)$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $s = t$, për çdo $s,t \in M$;
2. $q(s,s) \leq q(s,t)$, për çdo $(s,t) \in M^2$;
3. $q(s,s) \leq q(t,s)$, për çdo $(s,t) \in M^2$;
4. $q(s,t) \leq q(s,z) + q(z,t) - q(z,z)$, për çdo $s,t,z \in M$.

Çifti i renditur (M,q) quhet hapësirë metrike e pjesshme e dobët.

Përkufizim 1.5. (Sila *et.al* 2021) Le të jetë X një bashkësi e ndryshme nga bashkësia boshe dhe P një kon. Funksioni $q_w: X \times X \to P$ që plotëson kushtet e mëposhtëme:

1. $q_w(x,x) = q_w(x,y) = q_w(y,y)$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $x = y$, për $(x,y) \in X^2$;
2. $q_w(x,x) \leq q_w(x,y)$, për çdo $(x,y) \in X^2$;
3. $q_w(x,x) \leq q_w(y,x)$, për çdo $(x,y) \in X^2$;
4. $q_w(x,y) \leq s(q_w(x,z) + q_w(z,y))$, për çdo $x,y,z \in X$,

quhet kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët.

Çifti i renditur (X,q_w) quhet hapësirë kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët.

Shembull 1.6. (Sila, *et.al* 2021) Le të jete $E = R^2$, $X = R$ dhe $P = \{(x,y) \in E, x,y \geq 0\}$ një kon.

Përcaktojmë pasqyrimin $q_w: X \times X \to P$, të tillë që:

$$q_w(x,y) = \begin{cases} (\max\{x,y\}, \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \max\{x,y\}), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pasqyrimi q_w është kon metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët dhe (X, q_w) hapësirë kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët me $s \geq 1$.

Përkufizim 1.7. (Sila, *et.al* 2021) Le të jetë (X, q_w) një hapësirë kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët dhe $\{x_n\}_{n\in N}$ një varg në të.

1. Vargu $\{x_n\}_{n\in N}$ quhet konvergjent i djathtë në pikën $x \in X$, në qoftë se për çdo $c \gg 0$, ekziston $n_0 \in N$, e tillë që për $n > n_0$, rrjedh që $q_w(x_n, x) \ll c + q_w(x,x)$.
Shënohet $\lim_{n\to+\infty} q_w(x_n, x) = q_w(x,x)$.
2. Vargu $\{x_n\}_{n\in N}$ quhet konvergjent i djathtë në pikën $x \in X$, në qoftë se për çdo $c \gg 0$, ekziston $n_0 \in N$, e tillë që për çdo $n > n_0$, rrjedh që: $q_w(x, x_n) \ll c + q_w(x,x)$
Shënohet $\lim_{n\to\infty} q_w(x, x_n) = q_w(x,x)$.
3. Vargu $\{x_n\}_{n\in N}$ quhet konvergjent në pikën $x \in X$, në qoftë se ai është konvergjent i majtë dhe i djathtë në pikën $x \in X$.
4. Vargu $\{x_n\}_{n\in N}$ quhet Cauchy (Koshi) i majtë, në qoftë se për çdo $n < m$, ekziston $\lim_{n,m\to+\infty} q_w(x_n, x_m)$ dhe është i fundëm.
5. Vargu $\{x_n\}_{n\in N}$ quhet Cauchy (Koshi) i djathtë, në qoftë se për çdo $n < m$, ekziston $\lim_{n,m\to\infty} q_w(x_n, x_m)$ dhe është i fundëm.
6. Vargu $\{x_n\}_{n\in N}$ quhet Cauchy (Koshi), në qoftë se ai është Cauchy (Koshi) i majtë dhe Cauchy (Koshi) i djathtë.

Përkufizim 1.8. (Sila, *et.al* 2021) Hapësirë kon metrike pjesërisht e pjesshme e dobët (X, q_w) quhet e plotë në qoftë se çdo varg Cauchy (Koshi) konvergjon në një pikë $x \in X$ dhe

$$\lim_{n,m\to+\infty} q_w(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} q_w(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} q_w(x_n, x) = q_w(x,x)$$

Përkufizim 1.9. (Hussain, *et.al* 2012) Funksioni $\psi: P \to P$, ku *P* është kon në hapësirën e Banahut *E*, quhet funksion krahasues në qoftë se plotëson kushtet:

Për çdo $t \in P, \psi(t) < t$;
$\psi(0) = 0$;
$\lim_{n\to\infty} \|\psi^n(c)\| = 0, c \in P$.

Në analogji me përkufizimet e dhëna për funksionet α-të pranueshëm (Samet, *et.al* 2012) dhe μ-të pranueshëm **(**Salimi, *et.al* 2013**)**, paraqesim përkufizimet e mëposhtëme.

Përkufizim 1.10 Le të jenë $S, T: X \to X$ dhe $\alpha: X \times X \to [0, +\infty)$ dy pasqyrime. Çifti i renditur (S, T) quhet α-i pranueshëm, nëse për çdo $x, y \in X$, ka vend implikimi: në qoftë se $\alpha(x,y) \geq 1$ atëherë $\alpha(Sx, Ty) \geq 1$.

Përkufizim 1.11 Le të jenë $S, T: X \to X$ dhe $\mu: X \times X \to [0, +\infty)$ dy pasqyrime. Çifti i renditur (S, T) quhet μ-i pranueshëm në qoftë se për çdo $x, y \in X$ dhe $\mu(x, y) \leq 1$, ka vend mosbarazimi $\mu(Sx, Ty) \leq 1$.

Përkufizim 1. 12 (Ansari, *et.al* 2016, Sila, *et.al* 2020) Le të jenë $h, \mathcal{F}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ dy funksione. Çifti i renditur $(\mathcal{F}, h)$ quhet klasë e sipërme konike, në qoftë se funksionet $h, \mathcal{F}$ plotësojnë kushtet e mëposhtëme:

nëse $x \geq 1$, atëherë $h(1, y) \leq h(x, y)$, për çdo $y \in \mathrm{P}$;
për çdo $0 \leq s \leq 1, \mathcal{F}(s, t) \leq \mathcal{F}(1, t)$;
Nëse $h(1, y) \leq \mathcal{F}(s, t)$ atëherë $y \leq st$, për çdo $t, y \in P, s \in \mathbb{R}^+$.

Përkufizim 1.13 Le të jenë (X, q_w) një hapësirë kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët $T: X \to X$ një pasqyrim α-i pranueshëm dhe μ-i pranueshëm, $\psi: P \to \mathrm{P}$ një pasqyrim krahasues dhe $(\mathcal{F}, h)$ një klasë së sipërme konike. T do të quhet funksion i klasës së sipërme konike $(\mathcal{F}, h)$, nëse ai plotëson kushtin:

$$h(\alpha(x, y), q_w(Tx, Ty)) \leq \mathcal{F}(\mu(x, y), \psi(q_w(x, y))), \text{ për çdo } x, y \in X.$$

Rezultate kryesore

Përkufizim 2.1 Le të jenë (X, q_w) një hapësirë kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët; $T, S: X \to X$ një çift pasqyrimesh α-i pranueshëm dhe μ-i pranueshëm, $\psi: P \to P$ një pasqyrim krahasues dhe $(\mathcal{F}, h)$ një klasë së sipërme konike. (T, S) do të quhet çift funksionesh i klasës $(\mathcal{F}, h)$ nëse ai plotëson kushtin:

$$h(\alpha(Sx, Ty), q_w(Sx, Ty)) \leq \mathcal{F}(\mu(x, y), \psi(q_w(x, y))), \text{ për çdo } x, y \in X.$$

Lemë 2.2 Le të jetë (X, q_w) një hapësirë kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët me kon P. Në qoftë se $\{x_n\}_{n \in N}$ një varg në X i tillë që $q_w(x_n, x_{n+1}) < \psi(q_w(x_{n-1}, x_n))$, $(q_w(x_{n+1}, x_n) < \psi(q_w(x_n, x_{n-1})))$, për çdo $n \in N$, ku $\psi: P \to P$ është një funksion krahasues, atëherë $q_w(x_n, x_{n+1}) < \psi^n(q_w(x_0, x_1))$ $(q_w(x_{n+1}, x_n) < \psi^n(q_w(x_1, x_0)))$.

Vërtetim. Le të jetë $\{x_n\}_{n \in N}$ një varg në X i tillë që $q_w(x_n, x_{n+1}) < \psi(q_w(x_{n-1}, x_n))$, për çdo $n \in N$, ku $\psi: P \to P$ është një funksion krahasues.

Nga kushti $q_w(x_n, x_{n+1}) < \psi(q_w(x_{n-1}, x_n))$, për çdo $n \in N$, rrjedh që

$$q_w(x_n, x_{n+1}) < \psi(q_w(x_{n-1}, x_n)) < \psi(\psi(q_w(x_{n-2}, x_{n-1}))) < \cdots <$$
$$\psi(\psi(\ldots(\psi(q_w(x_0, x_1))))) = \psi^n(q_w(x_0, x_1))$$

Teoremë 2.3 Le të jenë P një kon me konstante normaliteti K dhe (X, q_w) një hapësire kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët dhe e plotë. Në qoftë se funksionet $T, S: X \to X$ janë çift funksionesh të klasës së sipërme konike $(\mathcal{F}, h)$, për të cilat pasqyrimet $\alpha, \mu: X \times X \to [0, +\infty)$ janë të tilla që ekziston një pikë $x_0 \in X$, e tillë që

$\alpha(S^n x_0, T^m x_0) \geq 1, \mu(S^n x_0, T^m x_0) \leq 1$, për çdo $m, n \in \mathbb{N}$, atëherë ekziston një pikë fikse e përbashkët $x^* \in X$ për T dhe S, dhe ajo është e vetme.

Vërtetim. Le të jetë $x_0 \in X$, e tillë që

$\alpha(S^n x_0, T^m x_0) \geq 1, \mu(S^n x_0, T^m x_0) \leq 1$, për çdo $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Përcaktojmë vargun $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ të tillë që $x_{2n+1} = Sx_{2n}$ dhe $x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$, për $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Vërejmë që

$$h(1, q_w(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \leq h(\alpha(x_{2n+1}, x_{2n+2}), q_w(x_{2n+1}, x_{2n+2}))$$
$$\leq \mathcal{F}(\mu(x_{2n}, x_{2n+1}), \psi(q_w(x_{2n}, x_{2n+1})))$$
$$\leq \mathcal{F}(1, \psi(q_w(x_{2n}, x_{2n+1})))$$
$$q_w(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \psi\big(q_w(x_{2n}, x_{2n+1})\big)$$
$$q_w(x_{2n+1}, x_{2n+2}) < q_w(x_{2n}, x_{2n+1}).$$
$$q_w(x_{2n+1}, x_{2n+2}) < q_w(x_{2n}, x_{2n+1}).$$

Ndjekim të njëjtin arsyetim si mësipërm dhe vëmë re që

$$q_w(x_{2n+2}, x_{2n+1}) < q_w(x_{2n+1}, x_{2n}).$$

Më poshtë tregohet që vargu. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ është Cauchy.

Vërtetë, së pari le të vertetojmë që ky varg është Cauchy i majtë.

Marrim $m, n \in N$, çfarëdo të tilla që $m < n$, dhe vëmë re që

$$\begin{aligned} q_w(x_m, x_n) &\leq s(q_w(x_m, x_{m+1}) + q_w(x_{m+1}, x_n)) \\ &= cq_w(x_m, x_{m+1}) + cq_w(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq sq_w(x_m, x_{m+1}) + s^2(q_w(x_{m+1}, x_{m+2}) + q_w(x_{m+2}, x_n)) \\ &= sq_w(x_m, x_{m+1}) + s^2 q_w(x_{m+1}, x_{m+2}) + s^2 q_w(x_{m+2}, x_n) \\ &\leq \cdots \\ &\leq sq_w(x_m, x_{m+1}) + s^2 q_w(x_{m+1}, x_{m+2}) \\ &\quad + s^2 q_w(x_{m+2}, x_{m+3}) + \cdots + s^{n-m+1} q_w(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq s\varphi^m\big(q_w(x_0, x_1)\big) + s^2 \varphi^{m+1}\big(q_w(x_0, x_1)\big) + \cdots \\ &\quad + s^{n-m+1} \varphi^n\big(q_w(x_0, x_1)\big) \\ &\leq [s^m \varphi^m\big(q_w(x_0, x_1)\big) + s^{m+1} \varphi^{m+1}\big(q_w(x_0, x_1)\big) + \cdots \\ &\quad + s^n \varphi^n\big(q_w(x_0, x_1)\big)] \frac{1}{s^{m-1}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{s^{m-1}} \frac{s^m \Big(1 - \Big(s\varphi\big(q_w(x_0, x_1)\big)\Big)^{n-m}\Big) \varphi^m\big(q_w(x_0, x_1)\big)}{1 - s\varphi\big(q_w(x_0, x_1)\big)}$$
$$\leq \frac{s\varphi^m\big(q_w(x_0, x_1)\big)}{1 - s\varphi\big(q_w(x_0, x_1)\big)}$$

Prej këtej shohim që ka vend mosbarazimi

$\|q_w(x_m, x_n)\| \leq K \left\| \frac{s\varphi^m(q_w(x_0, x_1))}{1 - s\varphi(q_w(x_0, x_1))} \right\|$, për çdo $m, n \in N, m < n$.

Kalojmë në limit kur $m, n \to +\infty$, dhe nga kushti 3 në përkufizimin e funksionit krahasues

$\lim_{m,n \to +\infty} \|q_w(x_m, x_n)\| = 0$, dhe prej këtej $\lim_{m,n \to +\infty} q_w(x_m, x_n) = 0$.

Në mënyrë analoge tregohet që $\lim_{m,n \to +\infty} q_w(x_n, x_m) = 0$, për çdo $m, n \in N, m < n$, pra që vargu $\{x_n\}_{n \in N}$ është Cauchy (Koshi) i djathtë dhe i majtë, dhe si i tillë ai është një varg Cauchy (Koshi).

Meqë hapësira (X, q_w) është e plotë atëherë vargu $\{x_n\}_{n \in N}$ konvergjon në një pikë $x^* \in X$, pra

$\lim_{n,m \to +\infty} q_w(x_n, x_m) = \lim_{n \to \infty} q_w(x, x_n) = \lim_{n \to \infty} q_w(x_n, x^*) = q_w(x^*, x^*)$.

Nga $\lim_{m,n \to +\infty} q_w(x_m, x_n) = 0$, del që $q_w(x^*, x^*) = 0$.

Të provojmë që x^* është pikë fikse e përbashkët për funksionet T dhe S.

Meqë vargu $\{x_n\}_{n \in N}$ konvergjon në pikën $x^* \in X$, atëherë

$\lim_{n \to +\infty} x_{2n} = \lim_{n \to +\infty} x_{2n+1} = x^*$.

Vëmë re

$$
\begin{aligned}
h\big(1, q_w(x_{2n+1}, Tx^*)\big) &= h\big(1, q_w(Sx_{2n}, Tx^*)\big) \\
&\leq h\big(\alpha(Sx_{2n}, Tx^*), q_w(Sx_{2n}, Tx^*)\big) \\
&\leq \mathcal{F}\Big(\mu(x_{2n}, x^*), \psi\big(q_w(x_{2n}, x^*)\big)\Big) \\
&\leq \mathcal{F}\Big(1, \psi\big(q_w(x_{2n}, x^*)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$q_w(x_{2n+1}, Tx^*) \leq \psi(q_w(x_{2n}, x^*)) < q_w(x_{2n}, x^*)$

Kalojmë në limit kur $n \to +\infty$, dhe kemi:

$\lim_{n \to +\infty} q_w(x_{2n+1}, Tx^*) \leq \lim_{n \to +\infty} q_w(x_{2n}, x^*)$,

prej nga $q_w(x^*, Tx^*) \leq 0 = q_w(x^*, x^*)$.

Mbetet që $q_w(x^*, Tx^*) = q_w(x^*, x^*)$, dhe $x^* = Tx^*$.

Në mënyrë të njëjtë, shohim që

$$
\begin{aligned}
h\big(1, q_w(Sx^*, x_{2n+2})\big) &= h\big(1, q_w(Sx^*, Tx_{2n+1})\big) \\
&\leq h\big(\alpha(Sx^*, Tx_{2n+1}), q_w(Sx^*, Tx_{2n+1})\big) \\
&\leq \mathcal{F}\Big(\mu(x^*, x_{2n+1}), \psi\big(q_w(x^*, x_{2n+1})\big)\Big) \\
&\leq \mathcal{F}\Big(1, \psi\big(q_w(x^*, x_{2n+1})\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$q_w(Sx^*, x_{2n+2}) \leq \psi(q_w(x^*, x_{2n+1})) < q_w(x^*, x_{2n+1})$

Shohim që $\lim_{n\to+\infty} q_w(Sx^{*},x_{2n+2}) \le \lim_{n\to+\infty} q_w(x^{*},x_{2n+1})$,

prej nga $q_w(Sx^{*},x^{*}) \le 0 = q_w(x^{*},x^{*})$.

Kjo tregon që $q_w(Sx^{*},x^{*}) = q_w(x^{*},x^{*})$, dhe $x^{*} = Sx^{*}$.

Meqë $Tx^{*} = x^{*} = Sx^{*}$, pika x^{*} është pikë fikse e përbashkët e funksioneve T dhe S.

Të tregojmë që pika x^{*} është e vetme. Supozojmë se ekziston një pikë tjetër $x^{*'} \in X$, e tillë që $x^{*} \neq x^{**}, Tx^{*'} = x^{*'} = Sx^{*'}$.

Shohim që

$$h\big(1, q_w(Sx^{*},Tx^{*'})\big) \le h\big(\alpha(Sx^{*},Tx^{*'}), q_w(Sx^{*},Tx^{*'})\big)$$
$$\le \mathcal{F}\Big(\mu(x^{*},x^{*'}),\psi\big(q_w(x^{*},x^{*'})\big)\Big) \le \mathcal{F}\Big(1,\psi\big(q_w(x^{*},x^{*'})\big)\Big)$$

$$q_w(Sx^{*},Tx^{*'}) \le \psi(x^{*},x^{*'})) < q_w(x^{*},x^{*'})$$

Për rrjedhojë, kemi të vërtetë mosbarazimin $q_w(x^{*},x^{*'}) < q_w(x^{*},x^{*'})$, i cili është një kontradiksion. Mbetet që $x^{*} \neq x^{**}$, pra pika fikse x^{*}, e përbashkët e funksioneve T dhe S është e vetme.

Shembull 2.4 Le të jetë $P = \{(x,y) \in R^2, x, y \ge 0$ një kon me konstante normaliteti $K = 1$ dhe $X = \{1,2,3\}$.

Marrim pasqyrimin $q_w: X \times X \longrightarrow P$ të tillë që:

$$q_w(x,y) = \begin{cases} (\max\{x,y\}, \min\{x,y\} + \max\{x,y\}), & x < y \\ \left(\max\{x,y\}, \min\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right\} + \max\{x,y\}\right), & x > y \\ (1,1), & x = y \end{cases}$$

$q_w(x,y)$ është një kon b-metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët dhe (X,q_w) është një hapësirë kon b- metrikë pjesërisht e pjesshme e dobët dhe e plotë Vëmë re që (X,q_w) nuk është hapësirë kon b- metrikë e pjesshme e dobët sepse nuk plotëson kushtin e dytë të simetrisë. Gjithashtu, ajo nuk është as e kon b-metrike e pjesshme sepse nuk plotësohet kushti i 4 i hapësirave metrike të pjesshme.

Për $h(x,y) = \frac{xy}{4}$ dhe $\mathcal{F}(x,y) = xy$, çifti $(\mathcal{F},h)$ është një klasë e sipërme konike.

Le të jenë $S: X \to X, Sx = \mathrm{x}$ dhe $T: X \to X, Ty = \frac{1+y}{7}$ dy funksione të vazhdueshëm, $\psi: P \to P, \psi(x,y) = (\frac{x}{7},\frac{y}{7})$ një funksion krahasues dhe

$$\alpha: X \times X \to [0,\infty), \alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12}\max(x,y), x \neq y \\ 1, x = y \end{cases}$$

$$\mu: X \times X \to [0,\infty), \mu(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ \frac{3}{4}, & x = y \end{cases}.$$

Çifti i funksioneve S, T i përket klasës së sipërme konike $(\mathcal{F}, h)$.

Dallojmë rastet:

Rasti 1. $x < y$

$$q_w(Sx, Ty) = q_w\left(x, \frac{1+y}{2}\right)$$
$$= \left(\max\left\{x, \frac{1+y}{2}\right\}, \min\left\{x, \frac{1+y}{2}\right\} + \max\left\{x, \frac{1+y}{2}\right\}\right)$$

Për $x = 1, y = 2$, kemi $q_w(S1, T2) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

$$h\big(\alpha(S1, T2), q_w(S1, T2)\big) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$$

Shohim që $q_w(1,2) = (2,3)$ dhe $\mathcal{F}(\mu(1,2), \psi\big(q_w(1,2)\big) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Rrjedhimisht $h\big(\alpha(S1, T2), q_w(S1, T2)\big) < \mathcal{F}(\mu(1,2), \psi\big(q_w(1,2)\big)$.

Për $x = 2, y = 3$, kemi $q_w(S2, T3) = (2,4)$.

$$h\big(\alpha(S2, T3), q_w(S2, T3)\big) = \frac{1}{8}(1,2)$$

Gjithashtu $q_w(2,3) = (3,4)$ dhe $\mathcal{F}(\mu(2,3), \psi\big(q_w(2,3)\big) = (\frac{3}{2}, 2)$.

Pra, $h\big(\alpha(S2, T3), q_w(S2, T3)\big) < \mathcal{F}(\mu(2,3), \psi\big(q_w(2,3)\big)$.

Për $x = 1, y = 3$, kemi $q_w(S1, T3) = (2,3)$.

$$h\big(\alpha(S1, T3), q_w(S1, T3)\big) = \frac{1}{8}(1, \frac{3}{2})$$

Shohim që $q_w(1,3) = (3,4)$ dhe $\mathcal{F}(\mu(1,3), \psi\big(q_w(1,3)\big) = (\frac{3}{2}, 2)$.

Si rezultat marrim $h\big(\alpha(S1, T3), q_w(S1, T3)\big) < \mathcal{F}(\mu(1,3), \psi\big(q_w(1,3)\big)$.

Rasti 2. $x > y$

Për $x = 2, y = 1$, kemi $q_w(S2, T1) = q_w(2,1) = (2, \frac{5}{2})$.

$$h\big(\alpha(S2, T1), q_w(S2, T1)\big) = \frac{1}{8}(\frac{2}{3}, \frac{5}{6})$$

Shohim që $q_w(2,1) = (2, \frac{5}{2})$ dhe $\mathcal{F}(\mu(2,1), \psi\big(q_w(2,1)\big) = (1, \frac{5}{4})$.

Si rrjedhojë $h\big(\alpha(S2, T1), q_w(S2, T1)\big) < \mathcal{F}(\mu(2,1), \psi\big(q_w(2,1)\big)$.

Për $x = 3, y = 2$, kemi $q_w(S3, T2) = (3, \frac{11}{3})$.

$$h\big(\alpha(S3, T2), q_w(S3, T2)\big) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right))$$

Kemi që $q_w(3,2) = (3, \frac{10}{3})$ dhe $\mathcal{F}(\mu(3,2), \psi(q_w(3,2)) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$.

Pra, $h(\alpha(S3, T2), q_w(S3, T2)) < \mathcal{F}(\mu(3,2), \psi(q_w(3,2))$.

Për $x = 3, y = 1$, kemi $q_w(S3, T1) = (3,4)$.

$$h(\alpha(S3, T1), q_w(S3, T1)) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$$

Shohim që $q_w(3,1) = (3,4)$ dhe $\mathcal{F}(\mu(3,1), \psi(q_w(3,1)) = (\frac{3}{2}, 2)$.

Pra, $h(\alpha(S3, T1), q_w(S3, T1)) < \mathcal{F}(\mu(3,1), \psi(q_w(3,1))$.

Rasti 3. $x = y$

Nëse $x = y = 1, S1 = T1 = 1$ dhe $q_w(S1, T1) = q_w(1,1) = (1,1)$.

Prej këtej

$h(\alpha(S1, T1), q_w(S1, T1)) = \frac{1}{8}(1,1), \mathcal{F}(\mu(3,1), \psi(q_w(3,1)) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$.

Del që $h(\alpha(S3, T1), q_w(S3, T1)) < \mathcal{F}(\mu(3,1), \psi(q_w(3,1))$.

Kur $x = y = 2, S2 = 2, T2 = \frac{3}{2}$ dhe $q_w(S2, T2) = q_w\left(2, \frac{3}{2}\right) = (3, \frac{7}{2})$.

Prej këtej

$h(\alpha(S2, T2), q_w(S2, T2)) = \frac{1}{24}(3, \frac{7}{2}), \mathcal{F}(\mu(2,2), \psi(q_w(2,2)) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$.

Për rrjedhojë $h(\alpha(S2, T2), q_w(S2, T2)) < \mathcal{F}(\mu(2,2), \psi(q_w(2,2))$.

Për $x = y = 3, S3 = 3, T3 = 2$ dhe $q_w(S3, T3) = q_w(3,2) = (3, \frac{10}{3}))$.

Atëherë

$h(\alpha(S3, T3), q_w(S3, T3)) = \frac{1}{16}(3, \frac{10}{3}) \mathcal{F}(\mu(3,3), \psi(q_w(3,3)) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$.

Kështu, rrjedh që $h(\alpha(S3, T3), q_w(S3, T3)) < \mathcal{F}(\mu(3,3), \psi(q_w(3,3))$.

Vëmë re që për çdo

$x, y \in X, h(\alpha(Sx, Ty), q_w(Sx, Ty)) < \mathcal{F}(\mu(x, y), \psi(q_w(x, y))$

dhe jemi në kushtet e Teoremes 2.3, atëherë S dhe T kanë një pikë fikse të përbashkët të vetme $x = 1, S1 = T1 = 1$.

Teoremë 2.5 Le të jenë P një kon me konstante normaliteti K dhe (X, q_w) një hapësirë kon b-metrike pjesërisht e pjesshme e dobët dhe e plotë. Në qoftë se funksioni $T: X \to X$ është i klasës së sipërme konike $(\mathcal{F}, h)$, për të cilat pasqyrimet $\alpha, \mu: X \times X \to [0, +\infty)$ janë të tilla që ekziston një pikë $x_0 \in X$, e tillë që $\alpha(T^n x_0, T^m x_0) \geq 1, \mu(T^n x_0, T^m x_0) \leq 1$, për çdo $m, n \in \mathbb{N}$, atëherë ekziston një pikë fikse e vetme $x^* \in X$ për T.

Vërtetim. Në Teoremën 2.3 marrim $S = T$, dhe kjo sjell vërtetësinë e teoremës.

Rrjedhim 2.6 Le të jenë P një kon me konstante normaliteti K dhe (X, q_w) një hapësirë kon b-metrike pjesërisht e pjesshme e dobët dhe e plotë. Në qoftë se çifti i funksioneve $T, S: X \to X$ është α-i pranueshëm dhe μ-i pranueshëm, dhe plotësojnë kushtin:

$$\alpha(Sx, Ty) \cdot q_w(Sx, Ty) \leq \mu(x, y) \cdot \psi(q_w(x, y)), \text{ për çdo } x, y \in X,$$

ku $\alpha, \mu: X \times X \to [0, +\infty)$ janë të tilla që ekziston një pikë $x_0 \in X$, e tillë që $\alpha(S^n x_0, T^m x_0) \geq 1, \mu(S^n x_0, T^m x_0) \leq 1$, për çdo $m, n \in \mathbb{N}$ dhe $\psi: P \to P$ është një funksion krahasues, atëherë ekziston një pikë fikse e përbashkët $x^* \in X$ për T dhe *S*, dhe ajo është e vetme.

Vërtetim. Në Teoremën 2.3, marrim $h(x, y) = xy$ dhe $\mathcal{F} = xy$. Prej këtej del që teorema është e vërtetë.

Rrjedhim 2.7 Le të jenë P një kon me konstante normaliteti K dhe (X, q_w) një hapësirë kon b-metrike pjesërisht e pjesshme e dobët dhe e plotë. Në qoftë se funksionet $T, S: X \to X$ të cilët plotësojnë kushtin jo linear të kontraktivitetit:

$$q_w(Sx, Ty) \leq \psi(q_w(x, y)), \text{ për çdo } x, y \in X,$$

ku $\psi: P \to P$ është një funksion krahasues, atëherë ekziston një pikë fikse e përbashkët $x^* \in X$ për T dhe *S*, dhe ajo është e vetme.

Vërtetim. Nëse në Rrjedhimin 2.6 marrim $\alpha(x, y) = 1$ dhe $\mu(x, y) = 1$, del vërtetësia e Rrjedhimit 2.7.

Rrjedhim 2.8 Le të jenë P një kon me konstante normaliteti K dhe (X, q_w) një hapësirë kon b-metrike pjesërisht e pjesshme e dobët dhe e plotë. Në qoftë se funksionet $T, S: X \to X$ të cilët plotësojnë kushtin jo linear të kontraktivitetit:

$$q_w(Sx, Ty) \leq q_w(x, y), \text{ për çdo } x, y \in X,$$

atëherë ekziston një pikë fikse e përbashkët e vetme $x^* \in X$ për T dhe *S*.

Vërtetim. Le të marrim $\psi: P \to P, \psi(t) = t$ në Rrjedhimin 2.7. Prej këtej del që Rrjedhimi 2.8 ka vend.

Përfundime. Në këtë punim janë dhënë disa rezultate për pika fikse të përbashkëta në hapësirat kon b-metrikë pjesërisht të pjesshme të dobëta dhe të plota. Të gjitha rezulatet e përftuara janë përgjithësim i rezulateve në hapësirat metrike të pjesshme të dobeta, hapësirave kon metrike.

Literatura

Huang L.G., Zhang X. (2007): Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J.Math.Anal. Appl. 332: 1468-1476

Mathew S. G. (1994): Partial metric topology, Annals of the New York Academy of Sciences, vol. 728: 183–197, Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications

Heckmann R. (1999): Approximation of a metric space by partial metric space, Applied Categorical Structures 7: 71–83

Hussain N., Kadelburg Z., Radenovic S., Al – Solami F. (2012): Comparison functions and fixed point results in partial metric spaces. Abstr. Appl. Anal 2012: Article ID 605781

Barakat M. A., Ahmed M.A., Zidan A.M. (2017): Weak – Partial Metric Spaces and Fixed Point Results, International Journal of Advances in Mathematics. Vol 6: 123 – 126

Aydi H, Barakat MA, Mitrović ZD, Šešum-Čavić V. (2018): A Suzuki-type multivalued contraction on weak partial metric spaces and applications. J Inequal Appl. (1):270. doi:10.1186/s13660-018-1866-9

Kanwal T, Hussain A, Kumam P, Savas E.(2019): Weak Partial b-Metric Spaces and Nadler's Theorem. Mathematics. 7(4):332

Durmaz, G., Acar, Ö, & Altun, I. (2013). Some fixed point results on weak partial metric spaces. Filomat, 27(2), 317-326

Hussain N., Kadelburg Z., Radenovic S., Al – Solami F. (2012): Comparison functions and fixed point results in partial metric spaces. Abstr. Appl. Anal: Article ID 605781

Barakat M.A., Ahmed M.A. and Zidan A.M. (2017): Weak Quasi-Partial Metric Spaces and Fixed Point Results International Journal of Advances in Mathematics Volume 2017, Number 6, Pages 123-136, eISSN 2456-6098

Salimi P., Latif A., Hussain. N (2013): Modified α-ψ contractive mappings with

applications, Fixed Point Theory and Applications:151

Samet B., Vetro C., Vetro P (2012): Fixed point theorem for $\alpha - \psi$ contractive type

mappings", Nonlinear Anal. 75, 2154-2165

Ansari H. A, Shukla S.(2016): Some fixed point theorems for ordered F-$(\mathcal{F},h)$-contraction and subcontractions in 0-f-orbitally complete partial metric spaces, J. Adv. Math . Vol. 9, No. 1, 37-53

Sila E.,, Ansari A. H., Liftaj S. (2020): $(\mathcal{F},\mathbf{h})$ cone upper class on Fixed Point Results in Quasi–Cone Metric Space for Generalized Contractive Mappings Using Diameter of Orbits, Proccedings Book, ICOM, Oct. 2020, pg.175-191

Sila E.,. Liftaj S., Dule K.(2021): Quasi weak – partial cone b – metric space and some fixed point results , IJMTT, Vol. 67 (2), 159-165

Abdeljawad T, Karapınar E., Taş K.: Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric space, Applied Math. Let. Vol24 (1), 1900-1904

Karapınar E., Erhan IM, Öztürk.A.(2013): Fixed point theorems on quasi-partial metric spaces. Mathematical and Computer Modelling , 57 (9-10), 2442-2