NJË REZULTAT NË HAPËSIRAT LINEARE TË 2 – NORMUARA UNIFORMISHT KONVEKSE

STRINGA A., **XHILLARI TH.**

Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

e-mail: artur.stringa@fshn.edu.al

Përmbledhje

Bynum (1971) ka dhënë dy përkufizime ekuivalente të konceptit të konveksitetit uniform për hapësirat lineare të normuara, duke u mbështetur në konceptin e pasqyrimit dual për hapësirat lineare normuara. Të motivuar nga rezutatet e mësipërme, në këtë artikull ne kemi dhënë një përkufizim ekuivalent të konceptit të konveksitetit uniform për hapësirat lineare të 2 – normuara, me anën e konceptit të pasqyrimit dual të tipit $(\mathbf{B}')$ për hapësirat lineare të 2 – normuara.

Abstract

Bynum (1971) have given two equivalent characterizations of uniform convexity in normed linear spaces using the concept of duality mapping in normed linear spaces. Motivated by this results, in this paper, using duality mappings of type $(\mathbf{B}')$ as related to linear 2 – normed spaces, we give an equivalent characterisation of uniform convexity in linear 2 – normed spaces.

Fjalëkyçe: Hapësirë lineare e 2 – normuar, uniformisht konvekse, 2 – funksional linear i kufizuar, pasqyrim dual.

1. Hyrje

Studimi i hapësirave lineare të 2 – normuara përbën këto 50 vitet e fundit një objekt studimi atraktiv për shumë matematicienë në botë. Struktura e përafërt e funksioneve 2 – normë me funksionet normë ka iniciuar ndërmarrjen e studimeve konkrete me aspekte gjeometrike në hapësirat lineare të 2 – normuara, të cilat janë shoqëruar me fitimin në mënyrë sistematike të një sërë rezultatesh të rëndësishme, me interes teorik dhe aplikativ. Shumë studime aktuale në hapësirat lineare të 2 – normuara lidhen me trajtimin në këto hapësira të problematikave të konveksitetit dhe në veçanti të konveksitetit uniform.

2. Rezultate paraprake

Hapësirat lineare të 2 – normuara janë hapësira lineare mbi fushën e numrave realë, në të cilat është përcaktuar një funksion me vlera reale jonegative, i quajtur funksion 2 – normë. Koncepti i funksionit 2 – normë është ndërtuar dhe studiuar për herë të parë nga Gähler (1965), një matematicien gjerman, në një sërë artikujsh të publikuar në revistën shkencore Math Nachrichten dhe është një koncept dy përmasor, i ngjashëm me konceptin e funksionit normë.

Përkufizim 2.1. (Gähler, 1965)

Le të jetë X një hapësirë lineare mbi fushën e numrave realë, me përmasë më të madhe se 1. Supozojmë se funksioni $\|\cdot,\cdot\| : X^2 \to \mathbb{R}$ gëzon këto cilësi :

(2N1) $\| x, y \| = 0 \Leftrightarrow$ Vektorët x dhe y janë linearisht të varur.

(2N2) $\| x, y \| = \| y, x \|$, për çdo $x, y \in X^2$.

(2N3) $\| \lambda x, y \| = |\lambda| \cdot \| x, y \|$, për çdo $\lambda \in \mathbb{R}$ dhe për çdo $x, y \in X^2$.

(2N4) $\| x, y + z \| \leq \| x, z \| + \| y, z \|$, për çdo $x, y, z \in X^3$.

Atëhere, funksioni $\|\cdot,\cdot\|$ quhet një funksion 2 – normë (ose shkurt 2 – normë) në X dhe çifti i rradhitur $X, \|\cdot,\cdot\|$ quhet një hapësirë lineare e 2 – normuar (ose shkurt një hapësirë e 2 – normuar).

Ndër vetitë bazë të 2 – normave mund të përmendim faktin se për çdo $x, y \in X^2$, $\| x, y \| \geq 0$.

Duke u mbështetur në konceptin e konveksitetit uniform për hapësirat e normuara, Newton (1969) ka ndërtuar konceptin e konveksitetit uniform për hapësirat e 2 – normuara, një koncept 2 – përmasor dhe i ngjashëm me konceptin e konveksitetit uniform për hapësirat e normuara.

N.q.s. X është një hapësirë lineare, atëhere për vektorët $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nga $X - 0$ me simbolin $\mathbb{V}\ x_1, x_2, \ldots, x_n$ shënojmë nënhapësirën lineare të hapësirës X, e lindur nga vektorët $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Përkufizim 2.2. (Newton, 1969)

Hapësira e 2 – normuar $X, \|\cdot,\cdot\|$ quhet uniformisht konvekse n.q.s. për çdo dy vargje vektorësh $x_n\ {}_{n=1}^{\infty}$ dhe $y_n\ {}_{n=1}^{\infty}$ nga hapësira dhe për çdo vektor $z \in X - 0$, të tillë që $\| x_n, z \| \leq 1, \| y_n, z \| \leq 1, n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{2}\ x_n + y_n\ , z \right\| = 1$

dhe $V\ z \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V\ x_n, y_n \right) = 0$, atëhere $\lim_{n \to \infty} \| x_n - y_n, z \| = 0$.

Përkufizimi i mëposhtëm është një përkufizim alternativ i konceptit të konveksitetit uniform për hapësirat e 2 – normuara.

Përkufizim 2.3. (Diminnie, Gähler & White, 1973)

Hapësira e 2 – normuar $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ quhet uniformisht konvekse n.q.s për çdo $\varepsilon\in(0,2]$ dhe për çdo vektor $z\in X-\{0\}$, ekziston numri pozitiv $\delta=\delta(\varepsilon,z)$, i tillë që për çdo dy vektorë x dhe y nga hapësira që plotësojnë kushtet $\|x,z\|\le 1$, $\|y,z\|\le 1$ dhe $\|x-y,z\|\ge\varepsilon$, të kemi se $\left\|\frac{1}{2}(x+y),z\right\|\le 1-\delta.$

Shembull 2.1. (Gähler, 1965)

Shënojmë me X hapësirën lineare $\mathbb{R}^3$, ku me $\mathbb{R}$ kemi shënuar fushën e numrave realë. Ndërtojmë funksionin $\|\cdot,\cdot\|:X^2\to\mathbb{R}$, sipas barazimit :

$$\|x,y\|=\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2},$$

për çdo dy vektorë $x=(a_1,b_1,c_1)$ dhe $y=(a_2,b_2,c_2)$ nga X. Funksioni $\|\bullet,\bullet\|$ është një funksion 2 – normë në X dhe hapësira $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ është një hapësirë e 2 – normuar uniformisht konvekse.

Duke përdorur konceptin e funksionalit linear të kufizuar për hapësirat e normuara, White (1969) ndërtoi konceptin e 2 – funksionalit linear të kufizuar për hapësirat e 2 –normuara, një koncept 2 – përmasor dhe i ngjashëm me konceptin e funksionalit linear për hapësirat e normuara.

Përkufizim 2.4. (White, 1969)

Supozojmë se $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ është një hapësirë e 2 – normuar dhe le të jenë $\mathbb{A},\mathbb{C}$ dy nënhapësira lineare të hapësirës X. Me përkufizim, pasqyrimi $F:\mathbb{A}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, quhet një 2 – funksional linear i kufizuar, n.q.se ai gëzon vetitë e mëposhtëme:

(i) $F(x+y,z+w)=F(x,z)+F(x,w)+F(y,z)+F(y,w)$, $(x,y)\in\mathbb{A}^2$ dhe $(z,w)\in\mathbb{C}^2$;

(ii) $F(\alpha x,\beta y)=\alpha\beta\cdot F(x,y)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ dhe $(x,y)\in\mathbb{A}\times\mathbb{C}$;

(iii) Ekziston $K>0$,, i tillë që $|F(x,y)|\le K\cdot\|x,y\|$, $(x,y)\in\mathbb{A}\times\mathbb{C}$.

Norma e F, $\|F\|$, përcaktohet sipas barazimit:

$$\|F\|=\inf\{K\ge 0/|F(x,y)|\le K\|x,y\|,\ (x,y)\in D(F)\}.$$

Koncepti i pasqyrimit dual për hapësirat e 2 – normuara, i cili është një koncept 2 – përmasor dhe i ngjashëm me konceptin e pasqyrimit dual për hapësirat e normuara, është ndërtuar nga Cho, Ha & Kim (1981) dhe është i lidhur ngushtë me konceptin e 2 – funksionalit linear të kufizuar.

N.q.s. $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ është një hapësirë e 2 – normuar dhe $b \in X - \{0\}$, atëhere me simbolin X^*_b shënojmë hapësirën lineare e të gjithë 2 – funksionaleve linearë të kufizuar me bashkësi përcaktimi $X \times \mathbb{V}(b)$.

Përkufizim 2.5. (Cho, Ha & Kim, 1981)

Le të jetë $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ një hapësirë e 2 – normuar.

Pasqyrimi $J_\Phi : X \times \mathbb{V}(b) \to \wp(X^*_b)$, ku $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, i tillë që $\Phi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, i përcaktuar sipas barazimit :

$$J_\Phi(x,z) = \{F \in X^*_b \,/\, F(x,z) = \|F\| \cdot \|x,z\|, \|F\| = \Phi(\|x,z\|)\}, \quad (x,z) \in X \times \mathbb{V}(b),$$

quhet një pasqyrim dual i tipit **(B')**.

Teoremë 2.1.(Stringa, 2015)

Le të jetë $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ një hapësirë e 2 – normuar dhe supozojmë se vektori $b \in X - \{0\}$. Pohimet e mëposhtëme janë ekuivalente :

(1) Hapësira $(X, \|\bullet,\bullet\|)$ është uniformisht konvekse.

(2) N.q.s. $J_\Phi : X \times \mathbb{V}(b) \to \wp(X^*_b)$ është një pasqyrim dual i tipit **(B')**, i tillë që $\Phi(\lambda) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$, atëhere për çdo $\varepsilon \in (0, 2]$ dhe për çdo vektor $z \in X - \{0\}$, kemi që :

$$\inf\{1 - F(y,z) \,/\, 0 \neq F \in J_\Phi(x,z),\ (x,y) \in X \times X,$$
$$\|x,z\| = 1, \|y,z\| \leq 1, \|x-y,z\| \geq \varepsilon\} > 0$$

3. Rezultate bazë

Teorema e mëposhtëme është një rezultat të fituar nga autorët dhe jep një përkufizim ekuivalent të konceptit të konveksitetit uniform për hapësirat lineare të 2 – normuara, duke u mbështetur në konceptin e pasqyrimit dual të tipit **(B')** për këto hapësira.

Teoremë 3.1.

Le të jetë $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ një hapësirë e 2 – normuar dhe supozojmë se vektori $b \in X - \{0\}$. Pohimet e mëposhtëme janë ekuivalente :

(1) Hapësira $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ është uniformisht konvekse.

(2) N.q.s. $J_\Phi : X \times \mathbb{V}(b) \to \wp(X^*_b)$ është një pasqyrim dual i tipit **(B$'$)**, i tillë që $\Phi(\lambda) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$, atëhere për çdo $\varepsilon \in (0, 2]$ dhe për çdo vektor $z \in X - \{0\}$, kemi që :

$$\inf\{(F-G)(x-y,z) \,/\, 0 \neq F \in J_\Phi(x,z), 0 \neq G \in J_\Phi(y,z), (x,y) \in X^2, \|x,z\| = 1, \|y,z\| = 1, \|x-y,z\| \geq \varepsilon\} > 0.$$

Vërtetim

(1) $\Rightarrow$ (2) Supozojmë se hapësira $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ është uniformisht konvekse.

Le të jetë $J_\Phi : X \times \mathbb{V}(b) \to \wp(X^*_b)$ një pasqyrim dual i tipit **(B$'$)**, i tillë që $\Phi(\lambda) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$. Supozojmë se $\varepsilon \in (0, 2]$, $z \in X - \{0\}$, $(x, y) \in X^2$, $\|x,z\| = 1$, $\|y,z\| = 1$, $\|x-y,z\| \geq \varepsilon$, $0 \neq F \in J_\Phi(x,z)$ dhe $0 \neq G \in J_\Phi(y,z)$. Kemi se :

$$F \in J_\Phi(x,z) \Leftrightarrow F(x,z) = \|F\| \cdot \|x,z\| = \Phi(\|x,z\|) \cdot \|x,z\| = \|x,z\|^2 = 1,$$

$$F(x+y,z) = F(x,z) + F(y,z) = 1 + F(y,z),$$

$$F(x+y,z) \leq \|F\| \cdot \|x+y,z\| = \|x+y,z\|,$$

$$G \in J_\Phi(y,z) \Leftrightarrow G(y,z) = \|G\| \cdot \|y,z\| = \Phi(\|y,z\|) \cdot \|y,z\| = \|y,z\|^2 = 1,$$

$$G(x+y,z) = G(x,z) + G(y,z) = 1 + G(x,z),$$

$$G(x+y,z) \leq \|G\| \cdot \|x+y,z\| = \|x+y,z\| \text{ dhe}$$

$$(F-G)(x-y,z) = [F(x,z) - F(y,z)] + [G(y,z) - G(x,z)] =$$

$$[F(x,z) - [F(x+y,z) - F(x,z)]] + [G(y,z) - [G(x+y,z) - G(y,z)]] =$$

$$[2 - F(x+y,z)] + [2 - G(x+y,z)] \geq [2 - \|x+y,z\|] + [2 - \|x+y,z\|].$$

Atëhere, për $\varepsilon \in \; 0,2$ dhe $z \in X - \; 0$, nga kushtet $\| x,z \| = 1, \; \| y,z \| = 1$ dhe $\| x-y,z \| \geq \varepsilon$, m.q.s. hapësira $X, \| \cdot , \cdot \|$ është uniformisht konvekse, në bazë të **Përkufizimit 2.3**, nxjerrim se ekziston numri pozitiv δ i tillë që :

$$F - G \quad x-y,z \; \geq \left[2 - \; \| x+y,z \| \; \right] + \left[2 - \; \| x+y,z \| \; \right] \; \geq \; 4\delta.$$

Prej këndej rrjedh se numri pozitiv 4δ është një kufi i poshtëm i bashkësisë

$$F - G \quad x-y,z \; / \, 0 \neq F \in J_{\Phi} \; x,z \; , 0 \neq G \in J_{\Phi} \; y,z \; , \; \; x,y \; \in X^2,$$
$$\| x,z \| = 1, \| y,z \| = 1, \| x-y,z \| \geq \varepsilon \quad .$$

Në bazë të përkufizimit të kufirit të përpiktë të poshtëm, rrjedh se :

$$\inf \quad F - G \quad x-y,z \; / \, 0 \neq F \in J_{\Phi} \; x,z \; , 0 \neq G \in J_{\Phi} \; y,z \; , \; \; x,y \; \in X^2,$$
$$\| x,z \| = 1, \| y,z \| = 1, \| x-y,z \| \geq \varepsilon \quad > 0.$$

(2) $\Rightarrow$ **(1)** Supozojmë se n.q.s. $J_{\Phi} : X \times \mathbb{V} \; b \; \to \wp \; X^{*}{}_{b}$ është një pasqyrim dual i tipit **(B')**, i tillë që $\Phi \; \lambda \; = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^{+}$, atëhere për çdo $\varepsilon \in \; 0,2$ dhe për çdo vektor $z \in X - \; 0$, kemi që :

$$\inf \quad F - G \quad x-y,z \; / \, 0 \neq F \in J_{\Phi} \; x,z \; , 0 \neq G \in J_{\Phi} \; y,z \; , \; \; x,y \; \in X^2,$$
$$\| x,z \| = 1, \| y,z \| = 1, \| x-y,z \| \geq \varepsilon \quad > 0.$$

Të vërtetojmë se hapësira $X, \| \cdot , \cdot \|$ është uniformisht konvekse. Supozojmë të kundërtën, d.m.th. supozojmë se hapësira $X, \| \cdot , \cdot \|$ nuk është uniformisht konvekse. Në bazë të **Teoremës 2.2.**, nxjerrim se ekziston $\varepsilon_0 \in \; 0,2$ dhe vektori $z_0 \in X - \; 0$, të tillë që :

$$\inf \quad 1 - F \;\; y,z_0 \; / \, 0 \neq F \in J_{\Phi} \;\; x,z_0 \; , \; \; x,y \; \in X \times X,$$
$$\| x,z_0 \| = 1, \| y,z_0 \| \leq 1, \| x-y,z_0 \| \geq \varepsilon_0 \quad = 0.$$

Atëhere, në bazë të vetisë karakteristike të kufirit të përpiktë të poshtëm, rrjedh se për çdo $n \in \mathbb{N}$, ekzistojnë vektorët x_n dhe y_n nga X dhe 2 – funksionali linear $0 \neq F_n \in J_{\Phi} \;\; x_n, z_0$, të tillë që:

$\| x_n, z_0 \| = 1,\ \| y_n, z_0 \| \leq 1, \| x_n - y_n, z_0 \| \geq \varepsilon_0$ dhe $0 \leq 1 - F_n(y_n, z_0) < \frac{1}{n}$,

nga ku nxjerrim se $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(y_n, z_0) = 1$. **(i)**

Nga ana tjetër, ka vend mosbarazimi :

$$1 - F_n(y_n, z_0) = 2 - F_n(x_n + y_n, z_0) \geq 2 - \| x_n + y_n, z_0 \| \geq 0,\ n \in \mathbb{N}. \ \textbf{(ii)}$$

Nga barazimi **(i)** dhe mosbarazimi **(ii)** nxjerrim se $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n + y_n, z_0 \| = 2$ **(iii)**,

prandaj pa cënuar vërtetimin e teoremës mund të supozojmë se për çdo $n \in \mathbb{N}$,

$\| x_n + y_n, z_0 \| > 0$. Ndërtojmë vargjet numerike $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dhe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sipas barazimeve $a_n = \dfrac{1}{\| x_n + y_n, z_0 \|}$ dhe $z_n = a_n (x_n + y_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Është i vërtetë barazimi $\| z_n, z_0 \| = 1$.

Supozojmë tani se $J_\Phi : X \times \mathbb{V}(b) \to \wp(X^*_b)$ është një pasqyrim dual i tipit

(B'), i tillë që $\Phi(\lambda) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$ dhe le të jetë $0 \neq H_n \in J_\Phi(z_n, z_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Për çdo $n \in \mathbb{N}$, mund të shkruajmë se:

$$H_n \in J_\Phi(z_n, z_0) \Leftrightarrow H_n(z_n, z_0) = \| H_n \| \cdot \| z_n, z_0 \| = \| z_n, z_0 \|^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\| x_n + y_n, z_0 \|} \cdot \left[H_n(x_n, z_0) + H_n(y_n, z_0) \right] = H_n(z_n, z_0) = 1 \Rightarrow$$

$$H_n(x_n, z_0) + H_n(y_n, z_0) = \| x_n + y_n, z_0 \| \ \textbf{(iv)}.$$

Meqenëse janë të vërteta mosbarazimet $H_n(x_n, z_0) \leq \| H_n \| \cdot \| x_n, z_0 \| = 1$ dhe $H_n(y_n, z_0) \leq \| H_n \| \cdot \| y_n, z_0 \| \leq 1$, nga barazimet **(iii)** dhe **(iv)** nxjerrim se $\lim\limits_{n \to \infty} H_n(x_n, z_0) = 1$. **(v)**

Për çdo $n \in \mathbb{N}$, kemi se :

$$(H_n - F_n)(z_n - x_n, z_0) = \left[H_n(z_n, z_0) - H_n(x_n, z_0)\right] - \left[F_n(z_n, z_0) - F_n(x_n, z_0)\right] =$$

$$\left[1 - H_n(x_n, z_0)\right] - \left[F_n\left(\frac{1}{\| x_n + y_n, z_0 \|}(x_n + y_n), z_0\right) - 1\right] =$$

$$\left[1 - H_n(x_n, z_0)\right] - \left[\frac{1}{\| x_n + y_n, z_0 \|}\cdot F_n(x_n, z_0) + \frac{1}{\| x_n + y_n, z_0 \|}\cdot F_n(y_n, z_0) - 1\right] =$$

$$2 - H_n(x_n, z_0) - \frac{1}{\| x_n + y_n, z_0 \|} - \frac{1}{\| x_n + y_n, z_0 \|}\cdot F_n(y_n, z_0),$$

nga ku rrjedh se $\lim\limits_{n\to\infty}(H_n - F_n)(z_n - x_n, z_0) = 0.$ **(vi)**

Për çdo $n \in \mathbb{N}$ mund të shkruajmë se $\| z_n - x_n, z_0 \| \geq \varepsilon_0 a_n - |1 - 2a_n|$.**(vii)**

Meqenëse $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\varepsilon_0 a_n - |1 - 2a_n|\right) = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, për vlera mjaftueshmërisht të mëdha të indeksit natyror n mund të pohojmë se ka vend mosbarazimi :

$$\varepsilon_0 a_n - |1 - 2a_n| = \left|\varepsilon_0 a_n - |1 - 2a_n|\right| > \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\varepsilon_0}{2}\right| = \frac{\varepsilon_0}{4},$$

prandaj, për vlera mjaftueshmërisht të mëdha të indeksit natyror n, nga vërtetësia e mosbarazimit **(vii)**, mund të pohojmë se ka vend mosbarazimi $\| z_n - x_n, z_0 \| \geq \dfrac{\varepsilon_0}{4}$. Atëhere, për vlera mjaftueshmërisht të mëdha të indeksit natyror n, nga vërtetësia e pohimit **(2)**, nxjerrim se :

$$\alpha(\varepsilon_0, z_0) = \inf\Big\{(H_n - F_n)(z_n - x_n, z_0) \,/\, 0 \neq H_n \in J_\Phi(z_n, z_0), 0 \neq F_n \in J_\Phi(x_n, z_0),$$
$$(x, y) \in X^2, \| z_n, z_0 \| = 1, \| x_n, z_0 \| = 1, \| z_n - x_n, z_0 \| > \frac{\varepsilon_0}{4}\Big\} > 0.$$

Pra, për vlera mjaftueshmërisht të mëdha të indeksit natyror n mund të shkruajmë se $(H_n - F_n)(z_n - x_n, z_0) \geq \alpha(\varepsilon_0, z_0) > 0.$ **(viii)**

Duke kaluar në limit në mosbarazimin **(viii)** kur $n \to \infty$, do të marrim se :

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - F_n)(z_n - x_n, z_0) > 0,$$

që është **<u>një kontradiksion</u>**, sepse kemi treguar më sipër se është i vërtetë barazimi (barazimi **(vi)**) $\lim\limits_{n \to \infty} \; H_n - F_n \quad z_n - x_n, z_0 \; = 0.$

Prandaj, supozimi i bërë se hapësira $X, \| \bullet , \bullet \|$ nuk është uniformisht konvekse bie poshtë, d.m.th. hapësira $X, \| \bullet , \bullet \|$ është një hapësirë uniformisht konvekse.

Literatura

Bynum W. L. (1971): Characterisations of Uniform Convexity, Pacific Journal of Mathematics, 38 (3): 577 – 581

Cho Y. J. – Ha K. S. – Kim W. S. (1981): Strictly Convex Linear 2 – Normed Spaces, Mathematica Japonica, 26 (4): 475 – 478

Diminnie C. – Gähler S. – White A. (1973): 2 – Inner Product Space, Demonstratio Mathematica, 6: 525 – 536

Freese R. – Cho Y. J.(2001): Geometry of linear 2 – Normed Spaces, Nova Science Publishers, New York

Gähler S. (1965): Linear 2 – Normierte Räume, Math. Nachr., 28:1 – 43

Newton. M. E. (1969): Uniform and Strict Convexity in Linear 2 – Normed Spaces, Doctoral Diss. Saint Louis University

Stringa A. (2015): 1st International Conference "Mathematics Days in Tirana", 11 – 12 December, Tirana, Albania.

White A. (1969): 2 – Banach Spaces, Math. Nachr., 4: 243 – 60