VETI FUNDSHMËRIE TË GJYSMËGRUPEVE QË KËNAQIN EKUACIONIN $xy = zx$

MIMOZA POLLOSHKA.[1], ELTON PASKU.[2]

[1]RIT KOSOVO (A.U.K), Prishtinë, Kosovë

[2]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

e-mail: mpolloshka@auk.org

Përmbledhje

Në këtë artikull ne do të relativizojmë problemin Burnside për gjysmëgrupet i cili paraqitet nga Restivo dhe Reutenauer në Restivo & Reutenauer (1984), për klasën e gjysmëgrupeve të cilat kënaqin ekuacionin $xy = zx$, ku ne zëvendësojmë periodicitetin e zakonshëm me $\mathcal{L}$-periodicitetin si dhe përkëmbyeshmërinë sipas Restivo me $\mathcal{L}$-përkëmbyshmërinë. Më saktësisht ne vërtetojmë që gjysmëgrupi kuazi-komutativ me përfitim të fundëm ka numër të fundëm $\mathcal{L}$-klasash vetëm atëherë kur është $\mathcal{L}$-periodik dhe $\mathcal{L}$- i përkëmbyeshëm, për ndonjë $n \geq 2$.

Fjalëkyçe: Gjysmëgrup kuazi-komutativ, gjysmëgrup i përkëmbyeshëm sipas Restivo, me përfitim të fundëm, $\mathcal{L}$-periodik, $\mathcal{L}$-përkëmbyeshëm.

Abstract

In this paper we will relativize the Burnside problem for semigroups presented by Restivo and Reutenauer in Restivo & Reutenauer (1984), for the class of semigroups that satisfy the equation $xy = zx$, where we replace the ordinary periodicity with $\mathcal{L}$-periodicity and permutability according to Restivo with $\mathcal{L}$- permutability. More precisely we prove that a finitely generated quasi-commutative semigroup has finite number of $\mathcal{L}$-classes if and only if it is $\mathcal{L}$-periodic and $\mathcal{L}$-permutable, for some $n \geq 2$.

Key words: Quasi- commutative semigroup**,** semigroup permutable after Restivo, finitely generated, $\mathcal{L}$-periodic, $\mathcal{L}$-permutable.

1. Hyrje dhe disa rezultate paraprake

Një ndër rezultatet më të spikatura të asaj pjese të teorisë së gjysmëgrupeve që lidhet me fundshërinë e gjysmëgrupeve me përftim të fundëm është ai i Restivo & Reutenauer (1984), i cili pohon se çdo gjysmëgrup S me përftim të fundëm është i fundëm n.q.se është peroidik dhe kënaq vetinë e përkëmbyeshmërisë për ndonjë $n \geq 2$.

Kjo e fundit do të thotë se për çdo $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ ekziston një përkëmbim $\sigma \in S_n$ jo trivial i tillë që $s_1 s_2 \cdots s_n = s_{\sigma(1)} s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)}$.

Kondita e përkëmbyeshmërisë është në fakt një konditë shumë e fortë e cila haset rrallë. Më tej ne do të propozojmë një tjetër konditë përkëmbyeshmërie e cila është si vijon. Një gjysmëgrup S do të thuhet se kënaq vetinë e $\mathcal{L}$ -përkëmbyeshmërisë për ndonjë $n \geq 2$, nqs për çdo $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$, ekziston një përkëmbim $\sigma \in S_n$ jo trivial dhe $a, b \in S$ të tillë që

$$s_1 s_2 \cdots s_n = a \cdot s_{\sigma(1)} \cdot s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)}$$

dhe

$$s_1 s_2 \cdots s_n = b \cdot s_{\sigma(1)} \cdot s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)}$$

E thënë ndryshe, S është $\mathcal{L}$ -i përkëmbyeshëm nqs ekziston një $n \geq 2$ e tillë që për çdo $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$, ekziston një përkëmbim $\sigma \in S_n$ jo trivial i tillë që prodhimi $s_1 s_2 \cdots s_n$ të jetë $\mathcal{L}$ -ekuivalent me prodhimin $s_{\sigma(1)} s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)}$.

Këtë veti ne do ta testojmë tek gjysmëgrupet S që plotësojnë konditën: $për\ çdo\ x, y \in S\ ekziston\ një\ z \in S\ i\ tillë\ qe\ xy = zx$. Të tillë gjysmëgrupe ekzistojnë vërtet. Për shembull gjysmëgrupet $\mathcal{L}$-komutativë të dhënë nga Nagy tek Nagy(2001) që me përkufizim janë ata gjysmëgrupe S të tillë që për çdo dy elemente $a, b \in S$ ekziston një $x \in S$ i tillë që $ab = xba$. Këta lloj gjysmëgrupesh janë interesantë pasi është treguar tek Nagy (2001) se ata zbërthehen si semilatisa gjysmëgrupesh arkimedianë. Po ashtu janë edhe gjysmëgrupet kuazi-komutativë sipas Nagy (2001), të cilët janë ata gjysmëgrupe S të tillë që për çdo $a, b \in S$ ekziston një $r \in \mathbb{N}$ e tillë që $ab = b^r a$.

Edhe kjo klasë gjysmëgrupesh është me interes studimi pasi të tillë gjysmëgrupe zbërthehen si semilatisa gjysmëgrupesh fuqi-superiorë. Me përkufizim një gjysmëgrup S do të quhet fuqi-superiorë n.q.se për çdo $a, b \in S$, ekzistojnë $n, m \in \mathbb{N}$ të tillë që $a^n = b^m$. Gjithashtu vërejmë se gjysmëgrupet kuazi-komutative janë nën klasë e klasës së gjysmëgrupeve normalë në sensin Kurokit tek Kuroki (1977).

Vërejmë se kushti jonë për gjysmëgrupet në konsideratë është më i përgjithshëm se sa ai i normalitetit sepse thotë ekzaktësisht se $xS \subseteq Sx$.

Më tej do të rendisim disa kuptime dhe rezultate paraprake që do të na nevojiten në kryerjen e vërtetimeve tona. Le të jetë $(S, \cdot)$ një gjysmëgrup i përftuar nga një nënbashkësi X. N.q.se shënojmë me A një alfabet ekuipotent me X-in, atëherë ekziston një epimorfizëm $\phi: A^+ \to S$ nga gjysmëgrupi i lirë me bazë A tek S ngushtimi i të cilit në A përputhet me pasqyrimin që realizon ekuipotencën e A me X-in. Mund të supozojmë për më tepër se A është totalisht e renditur dhe le të jetë $<$ renditja përkatëse në të. Duke përdorur renditjen $<$ mund të përcaktohet një renditje totale $<_a$ në A^+ por më parë do të kujtojmë renditjen leksikografike $<_{lex}$ në A^+. Le të jenë $u = a_1 \cdots a_n$ dhe $v = b_1 \cdots b_n$ dy fjalë nga A^+. Do të themi se $u <_{lex} v$ nqs $n < m$, ose $n = m$ dhe ekzistojnë faktorizimet $u = \alpha u_1 \beta, v = \alpha v_1 \beta$ të tilla që $u_1 = a_i \cdots a_j, v_1 = b_i \cdots b_j$ dhe për çdo $i \leq s \leq j, a_s < b_s$. Tani përcaktojmë $<_a$ në A^+ duke pozuar

$$u <_a v \; nqs \; |u| < |v| \; ose \; |u| = |v| \; por \; u <_{lex} v$$

Eshtë e qartë që $<_a$ është një renditje totale në A^+ dhe se për çdo nënbashkësi jo boshe C të A^+ ekziston në A^+ inferiori $inf(C)$ i C lidhur me $<_a$. Në veçanti, për çdo $s \in S$, $\inf(\phi^{-1}(s))$ i cili ekziston nga më sipër, është në fakt një element që i përket vetë $\phi^{-1}(s)$. Ky gjendet duke marrë nga $\phi^{-1}(s)$ të gjithë fjalët me gjatësi minimale e më pas duke marrë prej tyre më të voglën lidhur me renditjen $<_{lex}$. Në këtë artikull fjalën $e(s) = \inf(\phi^{-1}(s))$ do ta quajmë $etiket$ë të s-së. Kjo ide mund të shtrihet edhe për bashkësi me më tepër se një element.

Konkretisht, n.q.se $M \subseteq S$ është jo boshe çfarëdo, $etiket$ë të M do të quajmë fjalën

$$e(M) = inf\{e(s) | s \in M\}$$

Në artikull do të na nevojitet të përdorim teoremën e Shirshovit e cila lidhet me konceptin e n-ndarjes së një fjale të A^+ të parë si bashkësi totalisht e renditur lidhur me renditjen $<_a$. Me përkufizim një fjalë $u \in A^+$ do të quhet e n-ndarë n.q.se ekziston nje faktorizim $u = \lambda u_1 \ldots u_n \mu$ për të i tillë që për çdo $\sigma \in S_n$ jo trivial të kemi

$$u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma(n)} <_a u_1 \ldots u_n$$

Teoremë 1.1. (Teorema e Shirshovit)

Le të jetë A një alfabet totalisht i renditur i përbërë nga k shkronja dhe p, n numra të plotë ≥ 1. Ekziston një numër natyror $N(k, p, n)$ i tillë që çdo fjalë $w \in A^*$ me gjatësi të paktën $N(k, p, n)$ përmban si faktor një fjalë të n-ndarë ose fuqinë e p-të të një fjale joboshe.■

2. Rezultati kryesor

Qëllimi i këtij artikulli është të relativizojë rezultatin e Restivo dhe Reutenauer tek Restivo & Reutenauer (1984), duke zëvendësuar periodicitetin e zakonshëm me $\mathcal{L}$-periodicitetin, term që do shpjegohet fill më poshtë, dhe fundshmërinë e gjysmëgrupit me fundshmërinë e numrit të $\mathcal{L}$ -klasave të tij.

Me përkufizim, do të themi që një gjysmëgrup S është $\mathcal{L}$-periodik nqs për çdo $a \in S$ ekzistojnë numrat natyrorë $p > q$ të tillë që $(a^p, a^q) \in \mathcal{L}$.

Teoremë 2.1:

Le të jetë S një gjysmëgrup kuazi-komutativ me përftim të fundëm. Atëherë S ka një numër të fundëm $\mathcal{L}$ -klasash vetëm kur S është $\mathcal{L}$ -periodik dhe $\mathcal{L}$ -i përkëmbyeshëm për ndonjë $n \geq 2$.

Vërtetim

Zgjedhim $p \geq 2n$ të tillë që për çdo fjalë $u \in A^+$ me gjatësi më pak se n,

$(\phi(u)^p, \phi(u)^q) \in \mathcal{L}$ për ndonjë $q < p$. Kjo gjë është e mundur pasi $|A| < \infty$ dhe S është $\mathcal{L}$-periodik. Më tej do të tregojmë se për çdo $\mathcal{L}$ -klasë të fiksuar L, etiketa $w = e(L)$ është fjalë me gjatësi më pak sesa $N(|A|, p, n)$. Meqënëse fjalë të tilla ka një numër të fundëm, atëherë ka një numër të fundëm $\mathcal{L}$ -klasash. Për të vërtetuar pohimin më lart do të arsyetojmë nga e kundërta. Supozojmë pra se $|w| \geq N(|A|, p, n)$, atëherë nga teorema e Shirshovit, w është e n-ndarë, ose përmban si faktor fuqinë e p-të të ndonjë fjale u me gjatësi më pak se n. Në rastin e parë kur w është e n-ndarë, do të kemi që ajo zbërthehet në formën:

$$w = \lambda x_1 \cdots x_n \mu$$

dhe se për çdo $\sigma \in S_n$ jo trivial të kemi që

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} <_a x_1 \cdots x_n$$

Mirëpo kjo gjë ndodh për të gjitha përkëmbimet jo triviale, rrjedhimisht edhe për përkëmbimin σ që ekziston nga kushtet e teoremës. Pikërisht për këtë σ kemi se

$$w' = \lambda x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mu <_a \lambda x_1 \cdots x_n \mu = w$$

Ndërkaq ekzistojnë $a, b \in S$ të tilla që

$$\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) = a \cdot \phi(x_{\sigma(1)}) \cdots \phi(x_{\sigma(n)})$$

dhe

$$b \cdot \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) = \phi(x_{\sigma(1)}) \cdots \phi(x_{\sigma(n)})$$

Le të jetë α parafytyrë çfardo e a. Po të shumëzojmë majtas të dy anët e barazimit të parë më sipër me (λ) , atëherë përftojmë

$$\begin{aligned} \phi(w) &= \phi(\lambda x_1 \cdots x_n \mu) \\ &= \phi\left((\lambda\alpha)\cdot\left(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}\right)\cdot\mu\right) \\ &= \phi\left((\alpha'\lambda)\cdot\left(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}\right)\cdot\mu\right)\ (nga\ kushti\ \lambda S\subseteq S\lambda) \\ &\subseteq S\phi(w') \subseteq (\phi(w'))_l \end{aligned}$$

e cila sjell përfshirjen $(\phi(w))_l \subseteq (\phi(w'))_l$ e idealeve kryesorë të majtë. Në mënyrë të ngjashme duke shfrytëzuar barazimin

$$b\cdot\phi(x_1)\cdots\phi(x_n) = \phi(x_{\sigma(1)})\cdots\phi(x_{\sigma(n)})$$

arrijmë në përfundimin që $(\phi(w'))_l \subseteq (\phi(w))_l$. Kjo së bashku me përfshirjen tjetër sjellin barazimin $(\phi(w))_l = (\phi(w'))_l$ që tregon se $L_{\phi(w)} = L_{\phi(w')}$. Kemi arritur në një kontradiktë sepse $w' <_a w$ është etiketë e elementit $\phi(w')$ nga klasa $L = L_{\phi(w)}$ etiketa e së cilës ishte pikërisht w.

Në rastin e dytë kur w përmban si faktor fuqinë e p-të të ndonjë fjale u me gjatësi më pak se n, do të kishim që $w = \xi\cdot u^p\cdot\eta$. Por nga supozimi që $(\phi(u)^p,\phi(u)^q)\in\mathcal{L}$ rrjedh se $\left(\phi(\xi)\cdot\phi(u)^p\cdot\phi(\eta),\phi(\xi)\cdot\phi(u)^q\cdot\phi(\eta)\right)\in\mathcal{L}$. Vërtet,

$$\begin{aligned} &\phi(\xi)\cdot\phi(u)^p\cdot\phi(\eta) = \phi(\xi)\cdot a\cdot\phi(u)^q\cdot\phi(\eta)\ (\ sepse\ (\phi(u)^p,\phi(u)^q)\in\mathcal{L} \\ &= a'\cdot\phi(\xi)\cdot\phi(u)^q\cdot\phi(\eta)\ (sepse\ \phi(\xi)S\subseteq S\phi(\xi) \end{aligned}$$

që tregon se $\phi(\xi)\cdot\phi(u)^p\cdot\phi(\eta) \leq_{\mathcal{L}} \phi(\xi)\cdot\phi(u)^q\cdot\phi(\eta)$.

Në mënyrë të ngjashme tregohet edhe se

$$\phi(\xi)\cdot\phi(u)^q\cdot\phi(\eta) \leq_{\mathcal{L}} \phi(\xi)\cdot\phi(u)^p\cdot\phi(\eta)$$

dhe atëherë kemi

$$\left(\phi(\xi)\cdot\phi(u)^p\cdot\phi(\eta),\phi(\xi)\cdot\phi(u)^q\cdot\phi(\eta)\right)\in\mathcal{L}$$

Por kjo përbën një kontradiktë sepse $w' = \xi\cdot u^q\cdot\eta <_a \xi\cdot u^p\cdot\eta = w$ dhe w është minimal lidhur me $<_a$ në klasën $L = L_{\phi(w)}$.

Vërtetojmë tani të anasjellën. Meqënëse S ka një numër të fundëm $\mathcal{L}$-klasash, atëherë për çdo $s\in S$ do të ekzistojnë dy eksponentë natyrorë $q<p$ dhe një $\mathcal{L}$-klasë L e tillë që $s^p, s^q\in L$. Kjo tregon se S është $\mathcal{L}$-periodik. Të tregojmë tani

vetinë e $\mathcal{L}$ -përkëmbyeshmërisë. Supozojmë se $l \in \mathbb{N}$ është indeksi i $\mathcal{L}$ në S dhe le të jetë $n = 1 + 2l$. Për çdo $s_1, \dots, s_n \in S$ shohim bashkësinë $s_1, s_1 s_2, \dots, s_1 s_2 \cdots s_n$

Meqë numri i $\mathcal{L}$-klasave është i fundëm, atëherë ekzistojnë indekset

$i, j, k, 1 \leq i < j < k \leq n$ dhe një $\mathcal{L}$-klasë L të tillë që

$s_1 \cdots s_i, s_1 \cdots s_i \cdot s_{i+1} \cdots s_j, s_1 \cdots s_i \cdot s_{i+1} \cdots s_j \cdot s_{j+1} \cdots s_k \in L$

Shënojmë $u = s_1 \cdots s_i, x = s_{i+1} \cdots s_j$ dhe $y = s_{j+1} \cdots s_k$.

Me këto shënime kemi që

$$(u, ux) \in \mathcal{L} \ dhe \ (u, uxy) \in \mathcal{L}$$

Meqënëse relacioni $\mathcal{L}$ është kongruencë e djathtë , atëherë kemi

$$(uyx, uxyx) \in \mathcal{L} \ dhe \ (ux, uxyx) \in \mathcal{L}$$

Nga tranzitiviteti përftojmë që $(uyx, ux) \in \mathcal{L}$ e atëherë kemi që $(uxy, uyx) \in \mathcal{L}$. Por uyx është përftuar nga uxy duke kryer mbi të një përkëmbim jo trivial të termave. Kjo tregon se S ka vetinë e $\mathcal{L}$-përkëmbyeshmërisë për $n = 1 + 2l$ gjë që mbyll vërtetimin

Literatura

A. De Luca, S. Varricchio, (1999): Finiteness and Regularity in Semigroups and Formal Languages}, Springer-Verlag

J. Howie, (1995): Fundamentals of semigroup theory, Oxford Science Publications

A. H. Clifford and G.B. Preston, (1967): The algebraic theory of semigroups, Vol.I-II. Amer.Math.Soc., Providence, R.I

Kuroki, N., (1997): On normal semigroups, Czech. Math. Journal, Vol. 27 , No. 1, 43-53

Nagy, A. (2001): Special Classes of Semigroups , Kluwer Acadamic Publishers

Restivo, A., Reutenauer, Ch. (1984): On the Burnside Problem for Semigroups, J. Algebra, 89, 102-104