FERMIONET RRJETORE BORIÇI - CREUTZ DHE NDARJA PIKËSORE E AROMAVE

***ZEQIRLLARI R., BORIÇI A.**

Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Fizikës

e-mail: rudina.zeqirllari@fshn.edu.al

Përmbledhje

Fermionet me dublim minimal paraqesin mundësinë për simulime të shpejta, ndërkohë që ruajnë në mënyrë ekzakte simetrinë kirale. Këto lloj fermionesh kanë veçorinë e krijimit të dy llojeve fermionike nga një fushë e vetme ψ. Ndarja pikësore e këtyre dy llojeve në nyjet fqinjë lejon izolimin e gjendjeve specifike dhe ndërtimin e operatorëve mezonikë fizikë. Në këtë punim ne paraqesim një transformim të përshtatshëm për realizimin e ndarjes pikësore së aromave, çka siguron veçimin e efekteve të dy aromave, të cilat krijohen nga një fushë e vetme fermionike për veprimin Boriçi – Creutz. Operatorët hadronikë dhe korrelatorët rrjetorë, e ndërtuar duke përdorur metodën e ndarjes pikësore, janë tanimë funksion i vetëm një prej këtyre aromave.

Abstract

Minimally-doubled fermions present the possibility of fast simulations while maintaining one exact chiral symmetry. This kind of fermions have the unusual property of a single local field ψ creating two fermionic species. Spreading this field over nearby sites allows isolation of specific states and the construction of physical meson operators. In this work we present an appropriate transformation for the point-splitting method, in order to separate the effects of the two flavors which can be created by a single fermionic field for Boriçi – Creutz action. Hadronic operators and lattice correlators constructed using point – splitting have now just one flavor.

Fjalëkyçe: Fermione kirale, veprim me dublim minimal, përhapës, ndarje pikësore e aromave

Hyrje

Që prej lindjes së teorisë rrjetore të fushës (Wilson, 1974), problemi i dublimit të fermioneve ka qenë një prej pengesave më të mëdha për simulimet e QCD – së (Kromodinamikës Kuantike). Teorema e famshme Nielsen – Ninomiya (Nielsen & Ninomiya, 1981) përcakton shumë qartë fatin e fermioneve rrjetore. Kjo e fundit pohon se një veprim rrjetor lokal me simetri të saktë kirale, duhet të përshkruajë një numër çift aromash, çka do të thotë se brenda zonës së Briluenit përhapësi i fermionit duhet të ketë një numër çift polesh (zerosh) (Creutz,2008). Njihen disa veprime rrjetore kirale që kënaqin numrin minimal të aromave $N_f = 2$: veprimet me dublim minimal (Karsten 1981; Wilczek, 1987; Creutz, 2008; Boriçi, 2008). Avantazhi kryesor që kanë fermionet me dublim minimal është ultra – lokaliteti i tyre, çka do të thotë që janë jashtëzakonisht të shpejtë në simulime, ndërkohë që "mbrojnë" masën nga rinormalizimet shtesë (Creutz, 2008; Boriçi, 2008;

Creutz,2010). Këto fermione kanë veçorinë e krijimit të dy llojeve fermionike nga një fushë e vetme lokale (duke qenë se numri i aromave të fermioneve të Dirakut është dy).

Më poshtë do të diskutohet metoda e ndarjes pikësore së aromave për veçimin e efekteve të dy aromave, të cilat krijohen nga një fushë e vetme fermionike për veprimin Boriçi – Creutz (Boriçi, 2008). Kjo metodë është përdorur në një punim më të hershëm nga Creutz (Creutz, 2010) për fermionet Karsten-Wilczek.

Materiale dhe metodat

Fermionet Boriçi - Creutz

I motivuar nga struktura e elektroneve te grafenit në dy përmasa, Creutz prezantoi idenë e një veprimi rrjetor, i cili në katër përmasa, përshkruan dy aroma të fermioneve të Dirac-ut me simetri kirale ekzakte (Creutz M, 2008).

Në hapësirën e impulseve ky veprim ka formën (Boriçi, 2008):

$$D(p) = iB\gamma_4(4C - \sum_{\mu} \cos p_{\mu}) + i\sum_{k=1}^{3} \gamma_k s_k(p) \tag{1}$$

ku

$$\begin{aligned} s_1(p) &= \sin p_1 + \sin p_2 - \sin p_3 - \sin p_4 \\ s_2(p) &= \sin p_1 - \sin p_2 - \sin p_3 + \sin p_4 \\ s_3(p) &= \sin p_1 - \sin p_2 + \sin p_3 - \sin p_4 \end{aligned}$$

dhe B, C janë parametra të lirë. Tregohet se dy zerot e këtij operatori në zonën e Briluenit janë të lokalizuara në (p', p', p', p') dhe $(-p', -p', -p', -p')$, ku $C = \cos p'$. Në mënyrë që të merret një veprim rrjetor me një zero në origjinë, u propozua një formulim që zhvendos zerot në zonën e Briluenit tanimë në $(0, 0, 0, 0)$ dhe $(2p', 2p', 2p', 2p')$.

Mënyra më e thjeshtë për të marrë një veprim me një zero në origjinë është vendosja e veprimit të Creutz-it në një rrjetë ortogonale, të tillë që parametrat e veprimit të kënaqin kushtin $BS = C$, ku $S = \sin p'$. Merret kështu një formulim i ri i veprimit rrjetor në boshte ortogonale: veprimi Boriçi – Creutz. (Boriçi, 2008).

Tregohet (Boriçi, 2008) se operatori i Dirac – ut për fermionet Boriçi – Creutz në hapësirën e impulseve jepet si më poshtë:

$$D(p) = \sum_{\mu} i\gamma_{\mu} \sin p_{\mu} + \sum_{\mu} i\gamma'_{\mu} (\cos p_{\mu} - 1) \qquad (2)$$

Ky operator ka dy zero: $p_1 = (0, 0, 0, 0)$ dhe $p_2 = (\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2)$. Zerot e këtij veprimi, që i korrespondojnë dy aromave fizike, përzgjedhin një drejtim të preferuar në hapësirë – kohën euklidiane, i përcaktuar nga vija që i lidh ato. Për rastin e veprimit Boriçi – Creutz, ky drejtim është diagonalja e hiperkubit.

Ndarja pikësore e aromave

Fermionet me dublim minimal (Karsten 1981; Wilczek, 1987; Creutz, 2008; Boriçi, 2008) kanë veçorinë e krijimit të dy llojeve fermionike nga një fushë e vetme ψ. Në mënyrë që të marrim vetëm një prej këtyre llojeve, është e natyrshme të kombinohen fushat në nyjet fqinjë në mënyrë të tillë që të zhduket tjetri. Në fjalë të tjera, në hapësirën e impulseve, duhet të ndahen fushat në mënyrë pikësore, për të marrë vetëm një aromë (up ose down) në secilën nga polet (zerot) e veprimit (Creutz,2010). Pra duhet të gjejmë një tranformim të tillë, që të kënaqë barazimin e mëposhtëm:

$$M \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi(p + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Për rastin e fermioneve të lirë (mungojnë fushat kalibruese të bashkëveprimit) një transformim që kënaq barazimin e mësipërm, për fermionet Boriçi – Creutz, do të ishte si më poshtë:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sum_{\mu}(1 - \sin p_{\mu}) & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma}{4}\sum_{\mu}(1 - \cos p_{\mu}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi(p + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Rezultate dhe diskutimet

Duke përdorur transformimin e mësipërm do të merrnim paraqitjet e mëposhtme të kuarkeve u dhe d në hapësirën e impulseve:

$$u(p)=\frac{1}{4}\sum_{\mu}(1-\sin p_{\mu})\psi(p) \tag{5}$$

$$d(p)=\frac{\Gamma}{4}\sum_{\mu}(1-\cos p_{\mu})\psi(p+\frac{\pi}{2}) \tag{6}$$

Në hapësirën e koordinatave duke bërë transformimet përkatëse nga hapësira e impulseve (Borici, 2008), si dhe duke futur edhe fushat kalibruese U, në rastin e bashkëveprimeve (Creutz, 2010), fushat e kuarkeve u dhe d do të shkruheshin si më poshtë:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{4}\sum_{p}e^{ipx}\left(\sum_{\mu=1}^{4}(1+i\frac{e^{ip_{\mu}a}-e^{-ip_{\mu}a}}{2})\psi(p)\right)\\
u_x &= \frac{1}{4}\left[4\psi(\mathrm{x})+\frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^{4}(U_{x,\mu}\psi(\mathrm{x}+\mathrm{a}\,\mu)-U^{\dagger}{}_{x-\mathrm{a}\,\mu,\mu}\psi(\mathrm{x}-\mathrm{a}\,\mu)\right]=A\psi(x)
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
d_x &= \frac{\Gamma}{4}\sum_{p}e^{ipx}\left(\sum_{\mu=1}^{4}(1-i\frac{e^{ip_{\mu}a}+e^{-ip_{\mu}a}}{2})\psi(p+\frac{\pi}{2})\right)\\
d_x &= \frac{\Gamma}{4}\sum_{p'}e^{ip'x}e^{-i\frac{\pi}{2}x}\left(\sum_{\mu=1}^{4}(1-i\frac{e^{ip'_{\mu}a}-e^{-ip'_{\mu}a}}{2})\psi(p')\right)\\
d_x &= \frac{\Gamma}{4}e^{-i\frac{\pi}{2}(\mathrm{x}_1+x_2+x_3+x_4)}\left[4\psi(\mathrm{x})+\frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^{4}(U_{x,\mu}\psi(\mathrm{x}+\mathrm{a}\,\mu)-U^{\dagger}{}_{x-\mathrm{a}\,\mu,\mu}\psi(\mathrm{x}-\mathrm{a}\,\mu)\right]\\
d_x &= \Gamma e^{-i\frac{\pi}{2}(\mathrm{x}_1+x_2+x_3+x_4)}u_x
\end{aligned} \tag{8}$$

Pasi merren fushat bazike për secilin kuark, mund të ndërtohen lehtësisht operatorët interpolues apo fushat mezonike, të cilat sigurisht kanë të përfshirë ndarjen pikësore të aromave, në mënyrë të tillë që tanimë operatorët interpolues të jenë funksionin i vetëm një prej aromave.

Kështu për shembull, operatori interpolues për pionin neutral do të shkruhej:

$$\pi_0(x) = \overline{\psi(x)}\gamma_5\tau_3\psi(x) = \overline{\mathrm{u}(x)}\gamma_5\,\mathrm{u}(x) - \overline{\mathrm{d}(x)}\gamma_5\,\mathrm{d}(x)$$

$$\pi_0(x) = \overline{\mathrm{u}(x)}\gamma_5\,\mathrm{u}(x) - \overline{\mathrm{u}(x)}e^{i\frac{\pi}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4)}\Gamma\gamma_5\Gamma e^{-i\frac{\pi}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4)}u_x = 2\overline{\mathrm{u}(x)}\gamma_5\,\mathrm{u}(x) \quad (9)$$

Kihet parasysh se :

$$\overline{d(x)} = d_x^*\gamma_4 = u^*(x)e^{i\frac{\pi}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4)}\Gamma\gamma_4 = \overline{\mathrm{u}(x)}e^{i\frac{\pi}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4)}\Gamma$$

$\Gamma = \frac{\sum_\mu \gamma_\mu}{2}$, ku γ_μ paraqesin matricat e Dirac-ut

Duke patur parasysh shprehjen e mësipërme të operatorit interpolues, tregohet lehtësisht se korrelatori rrjetor (përhapësi i pionit) tanimë do të ishte:

$$\pi_x\pi_y^* = 2\overline{\mathrm{u}(x)}\gamma_5\,\mathrm{u}(x)2\overline{\mathrm{u}(\mathrm{y})}\gamma_5\,\mathrm{u}(\mathrm{y}) = (\overline{\psi}\,\mathrm{A}^*)_x\gamma_5(A\psi)_x(\overline{\psi}\,\mathrm{A}^*)_y\gamma_5(A\psi)_y \quad (10)$$

ku A – matrica e përcaktuar nga barazimi (7)

Duke përdorur kontraktimet e Wick-ut (Wick, 1950) tregohet se përhapësi i pionit neutral gjendet si më poshtë:

$$\pi_x\pi_y^* = \sum_{\alpha\sigma}(AG^*A)_{xy}^{\alpha\sigma}(AGA^*)_{yx}^{\alpha\sigma} = \sum_{\alpha\sigma}(C^*)_{xy}^{\alpha\sigma}C_{yx}^{\alpha\sigma} = \sum_{\alpha\sigma}\overline{C}_{xy}^{\alpha\sigma}C_{yx}^{\alpha\sigma} = \sum_{\alpha\sigma}\left|C_{yx}^{\alpha\sigma}\right|^2$$

ku $C = AGA^*$

A* - e konjuguara hermitiane e matricës A të gjetur nga barazimi (7)

G – përhapësi i kuarkeve për një burim pikësor (nqs nuk do të kishim realizuar ndarjen pikësore të aromave)

Gjetëm kështu shprehjet e operatorit interpolues dhe korrelatorit rrjetor (përhapësit) të pionit neutral të shprehuara vetëm si funksion i njërës prej aromave. Tanimë përhapësi i pionit neutral me aroma të përziera, projektohet me anë të operatorëve *A* dhe *A** në një përhapës që ka vetëm një fermion, çka kërkonim të realizonim.

Përfundime

Fermionet rrjetore Boriçi – Creutz kanë veçorinë e krijimit të dy llojeve fermionike nga një fushë e vetme lokale. Duke përdorur ndarjen pikësore të aromave, ne arritëm të ndajmë efektet e këtyre aromave dhe ndërtuam lehtësisht operatorin interpolues dhe korrelatorin rrjetor të pionit neutral, si funksion të vetëm një fermioni. Në të njëjtën mënyrë llogariten edhe operatorë të tjerë hadronikë dhe korrelatorët përkatës.

Me ndërtimet e realizuara mund të llogariten më pas masat për gjithë spektrin e hadroneve, njësoj si për veprimet që kanë vetëm një pol (një fermion). Gjithsesi mbetet të rivendoset simetria hiperkubike nëpërmjet rinormalizimit jo – perturbativ (Weber *et al*, 2013), puna e cila është ende në vazhdim për veprimin në fjalë.

Falënderime

Falënderime për këshillat e vlefshme Prof. Luigi Del Debbio, Universiteti i Edinburgut dhe Dr. Pavel Buividovich, Universiti i Regensburgut.

Literatura

Boriçi A. (2008): Minimally Doubled Fermion Revival, PoS LATTICE2008:231

Boriçi A. (2008): Phys. Rev. D78 074504, arXiv:0712.4401

Creutz M. (2008): Four-dimensional graphene and chiral fermions, JHEP 0804, 017

Creutz M. (2010): Minimal doubling and point splitting,

http://xxx.lanl.gov/abs/1009.3154

Nielsen H. B, Ninomiya M. (1981): Nucl.Phys.B185:20

Sharpe S. R & Singleton R. L. (1998): Spontaneous flavor and parity breaking with Wilson fermions,Phys. Rev. D 58, 074501 [arXiv:hep-lat/9804028]

Tiburzi B. C. (2010): Chiral Lattice Fermions, Minimal Doubling, and the Axial Anomaly, arXiv: 1006.0172 [hep-lat]

Wiczek F. (1987): Phys. Rev. Lett. 59, 2397

Wilson K. G. (1974): Phys.Rev.D10:2445-245

Weber J, Capitani S, Wittig H (2013): Numerical studies of Minimally Doubled Fermions, arXiv: 1312.0488 [hep-lat]

Wick G.C, (1950): The evaluation of the collision matrix, Phys. Rev. 80, 268-272