

## RIVENDOSJA E SIMETRISË HIPERKUBIKE TEK FERMIONET BORIÇI – CREUTZ

RUDINA OSMANAJ<sup>1</sup>, DAFINA HYKA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Fizikës

<sup>2</sup>Universiteti Politeknik i Tiranës, Fakulteti i Inxhinierisë Matematike dhe

Inxhinierisë Fizike, Departamenti i Inxhinierisë Fizike

e-mail: rudina.zeqirllari@fshn.edu.al

### Përmbledhje

Fermionet me dublim minimal janë propozuar si një diskretizim i veprimit fermionik të Kromodinamikës Kuantike (QCD), që ruajnë simetrinë kirale por thyejnë simetrinë hiperkubike. Ato gjithashtu janë një formulim lokal, çka i bën mjaft të përshtatshëm për simulime të shpejta. Sidoqoftë simetria e thyer hiperkubike duhet rivendosur, mundësisht me një kosto llogaritëse sa më të ulët. Në këtë mënyrë fermionet me dublim minimal vazhdojnë të jenë të përshtatshme për simulime të shpejta e kosto llogaritëse sa më të pranueshme. Qëllimi i këtij punimi është pikërisht rivendosja e simetrisë hiperkubike për këto lloj fermionesh me një kosto llogaritëse minimale. Llogaritjet numerike jo - perturbative për rivendosjen e saj për fermionet Boriçi – Creutz publikohen për herë të parë në komunitetin e LQCD – së, në këtë punim. Duke përdorur integrimin numerik të Gauss – Lanczos dhe konceptin e thyerjes spontane të simetrisë kirale, eksplorohet struktura fazore e QCD – së duke ndryshuar vlerat e kundërtermit të shtuar në veprim që korrigjon thyerjen e simetrisë hiperkubike. Rezultatet e mara përputhen me rezultatet e parashikuara nga teoria kirale e perturbimit.

**Fjalëkyçe:** fermione kirale, dublim minimal, simetri hiperkubike, simetri kirale.

### Abstract

Minimally doubled fermions have been proposed as a strictly local discretization of the QCD fermionic action, which also preserves chiral symmetry at finite cut-off, while break the hypercubic symmetry. Being strictly local, they present the possibility of fast simulations while maintaining one exact chiral symmetry. Anyway the broken hypercubic symmetry has to be restore, possibly with a minimal numerical cost. In this way, minimally doubled fermions can be still suitable for fast simulations. The aim of this work is the non – perturbative restauration of hypercubic symmetry. This numerical study is the first one for this kind of fermions in LQCD community. Using Gauss – Lanczos quadrature and the concept of spontaneous chiral symmetry breaking, we explore the phase structure of QCD, changing the value of one counterterm in the action, that restore the broken symmetry. The results are comparable with the predicted results of the chiral perturbation theory.

**Keywords:** chiral fermions, minimally doubling, hypercubic symmetry, chiral symmetry.

## Hyrje

### *Fermionet me dublim minimal*

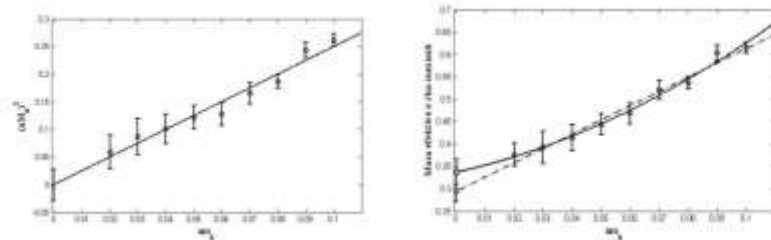
Që prej lindjes së teorisë rrjetore të fushës (Wilson, 1974), problemi i dublinit të fermioneve ka qenë një prej pengesave më të mëdha për simulimet e QCD – së (Kromodinamikës Kuantike). Teorema Nielsen – Ninomiya (Nielsen & Ninomiya, 1981) përcakton shumë qartë fatin e fermioneve rrjetore. Njihen disa veprime rrjetore kirale që kënaqin numrin minimal të aromave  $N_f = 2$ : veprimet me dublim minimal (Karsten, 1981; Wilczek, 1987; Creutz, 2008; Boriçi, 2008). Avantazhi kryesor që kanë fermionet me dublim minimal është ultra – lokaliteti i tyre, çka do të thotë që janë jashtëzakonisht të shpejtë në simulime.

### *Fermionet Boriçi - Creutz*

I motivuar nga struktura e elektroneve të grafenit në dy përmasa, Creutz prezantoi idenë e një operatori fermionik rrjetor, i cili në katër përmasa, përshkruan dy aroma të fermioneve të Dirakut me simetri kirale ekzakte (Creutz, 2008). Në mënyrë që të merret një veprim rrjetor me një zero në origjinë, u propozua një formulim i ri i operatorit rrjetor në boshte ortogonale: operatori Boriçi – Creutz. (Boriçi, 2008).

$$D(p) = \sum_{\mu} i\gamma_{\mu} \sin p_{\mu} + \sum_{\mu} i\gamma'_{\mu} \cos p_{\mu} - 2i\Gamma$$

Ky operator ka dy zero:  $p_1 = (0, 0, 0, 0)$  dhe  $p_2 = (\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2)$ . Zerot e këtij operatori, që i korrespondojnë dy aromave fizike, përzgjedhin një drejtim të preferuar në hapësirë – kohën euklidiane, i përcaktuar nga vija që i lidh ato. Për rastin e operatorit Boriçi – Creutz ky drejtim është diagonalja e hiperkubit. Rrjedhimisht simetria hiperkubike thyhet (Bedaque *et al*, 2008; Boriçi, 2008). Efektet e thyerjes së simetrisë hiperkubike janë treguar edhe në një punim më të hershëm (Zeqirllari *et al*, 2011), rezultatet e të cilit paraqiten edhe më poshtë.



**Figura 1.** Varësia e masës efektive të a) pion-it dhe b) rho - mesonit ndaj masës së zhveshur të kuarkeve

Masa e ekstrapoluar e pionit neutral për masë kuarku zero, është 0.0044, praktikisht zero në kufijtë e gabimit. Ky rezultat përputhet me faktin se për fermionet Boriçi – Creutz pi-mezoni neutral duhet të jetë ekzaktësisht zero

në kufirin kiral. Ndërkohë, që në rastin e rho - mezonit shohim se masa e marrë pas ekstrapolimit kuadratik në zero, është:

$$(0.33739 * 2 \text{ GeV}) \pm (0.0257 * 2 \text{ GeV}) = 674.78 \pm 51.4 \text{ MeV}$$

Duke ditur se vlera eksperimentale e rho – së është 770 MeV, vihet re që masa e saj e llogaritur me anë të fermioneve Boriçi – Creutz ka një shmangie rreth 100 MeV nga ajo eksperimentale. Kjo tregon që këto fermione me thyerje simetrie hiperkubike japin efekt në spektrin e hadroneve. Gjithashtu edhe sjellja e pi-mezoneve të ngarkuara është studiuar dhe rezultatet janë paraqitur në një tjetër punim tonin. (Zeqirllari, Boriçi, 2014). U vu re se masat e pi mezoneve të ngarkuara ndryshojnë nga njëra tjetra dhe janë të ndryshme nga zero. Diferenca e masave nga njëra – tjetra dhe nga zero në rastin e limitit kiral dëshmon qartë thyerjen e simetrisë hiperkubike. Për të korrigjuar thyerjen e simetrisë hiperkubike, operatorit origjinal BC i shtohet dhe kundërtermi  $c_3$  si më poshtë (Capitani *et al*, 2010):

$$D_{BC}(p) = \sum_{\mu} [i\gamma_{\mu} \sin p_{\mu} + i(\Gamma - \gamma_{\mu}) \cos p_{\mu}] + i(c_3 - 2)\Gamma$$

Një mënyrë për rivendosjen e simetrisë është ajo e simulimit të thyerjes spontane të simetrisë dhe krijimit të kondensatit kiral. Vlerat e kundërtermit që rivendos simetrinë hiperkubike dhe metodologjia e përdorur përcaktohen në seksionet e mëposhtme nga simulimet e bëra mbi thyerjen spontane të simetrisë kirale në mënyrë dinamike dhe krijimi i kondensatit kiral.

## Materiali dhe metodat

### Relacioni Banks – Kasher

Thyerja e simetrisë kirale në Kromodinamikën Kuantike është një element shumë i rëndësishëm në kuptimin e deritanishëm të fizikës hadronike të energjive të ulëta. Nga vakumi i QCD - së krijohen në mënyrë të vazhduar çifte të tilla kuark - antikuark dhe për prodhimin e tyre nuk kërkohet energji sepse kuarku dhe anti - kuarku karakterizohen nga helicitete të kundërta dhe si të tilla, sasisë totale e lëvizjes është zero dhe nuk kërkohet kosto energjetike për krijimin e tyre. Mirëpo korda bën që grimca dhe anti - grimca të mos jenë të lirë në lëvizjen e tyre, pra kuarket  $L$  dhe  $R$  nuk mund të gëzojnë simetrinë rrotulluese së langrazhianit të QCD – së në mënyrë të pavarur. Kjo lidhje bën që kiralitetet e çiftit të mos jenë të pavarura, prandaj simetria kirale thyhet. Në këtë mënyrë jemi si në rastin e ferromagnetëve. Gjendja bazë nuk gëzon simetrinë e langrazhianit. Nga teorema e Goldstonit, simetria mbetëse është  $U(2)_R \times U(2)_L \rightarrow U(2)$  dhe rrjedhimisht duhet të na shfaqen 4 grimca (bozonet e Goldstonit):  $\pi^0, \pi^{\pm}, \Sigma$ . Pra, prania e kondensatit  $\Sigma$  tregon thyerjen spontane të simetrisë kirale.

Relacioni Banks - Kasher (Banks – Casher) lidh dendësinë spektrale të operatorit të Dirakut me kondensatin kiral, më anë të një identiteti që mund të lexohet në të dyja drejtimet (Banks & Casher, 1980).

Kur simetria hiperkubike çënohet, si në rastin e fermioneve me dublim minimal, sasia e përbashkët e lëvizjes së çiftit kuark-antikuark me kiralitete të kundërta nuk është zero sepse shpejtësitë sipas drejtimeve të ndryshme janë të ndryshme. Prandaj kërkohet energji për krijimin e tyre prej vakumit. Në këtë mënyrë, mungesa e simetrisë hiperkubike pengon krijimin e çifteve të tilla, pra nuk mund të ketë kondensat, e si pasojë simetria kirale qëndron ekzakte. Prandaj, kushtet e krijimit të kondensatit krijohen vetëm në qoftë se simetria e Lorencit është e pranishme. Duke u nisur pikërisht nga ky fakt, duke vendosur kundërkufizat e duhura në veprim, në mënyrë të tillë që të marrim thyerjen spontane të simetrisë kirale dhe të kemi formimin e kondensatit, në rivendosim dhe simetrinë hiperkubike që veprimet me dublim minimal thyjnë.

Pra struktura e fazave të QCD – së për këto lloj fermionesh në temperaturën  $T = 0K$ , na lejon të rivendosim simetrinë hiperkubike të munguar.

### Kondensati kiral në teorinë e vazhduar

Në një vëllim  $V$  të hapësirë – kohës, me kushte periodike apo antiperiodike, operatori euklidian i Dirakut pa masë  $D$ , në prani të një fushe kalibruese ka vlera vetjake imagjinare  $i\lambda_1, i\lambda_2, \dots$ , të cilat mund të renditen sipas një rendi rritës të amplitudave. Dendësia spektrale mesatare e lidhur me të jepet nga relacioni:

$$\rho(\lambda, m) = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{\infty} \langle \delta(\lambda - \lambda_k) \rangle$$

ku kllapat  $\langle \dots \rangle$  përcaktojnë pritjen matematike të QCD – së dhe  $m$  është masa e kuarkut. Relacioni Banks – Kasher (Banks & Casher, 1980) lidh dendësinë spektrale  $\rho(\lambda, m)$  të operatorit të Dirakut me kondensatin kiral sipas relacionit :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \rho(\lambda, m) = \frac{\Sigma}{\pi}$$

$$\text{ku } \Sigma = - \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \langle \bar{\psi} \psi \rangle .$$

Ky relacion mund të lexohet në dy drejtime: një dendësi spektrale e ndryshme nga zero nënkupton që simetria kirale është thyer dhe anasjelltas.

Shumë herë, në vend që të përdorim dendësinë spektrale, numri mesatar i modeve vetjake  $\nu(M, m)$  të operatorit hermitian masiv  $D^\dagger D + m^2$  me vlera vetjake  $\alpha \leq M^2$ , duket si një madhësi më e përshtatshme për të punuar. Duke qenë se :

$$\nu(\Lambda) = V \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda, m)$$

numri i modeve mbart të njëjtin informacion si dendësia spektrale (Giusti and Luscher, 2009)

Siç u përmend më sipër, dendësia spektrale dhe modet e ulta të Dirakut janë shumë të rëndësishëm për të kuptuar thyerjen spontane të simetrisë kirale. Për më tepër kondensati kiral shërben si një parametër renditjeje për të dalluar fazat në temperaturë  $T = 0$  K, në rastin e fermioneve minimalisht të dubluara. Në rastin e hapësirës së vazhduar dhe për masa të vogla kuarkesh, numri i modeve mund të llogaritet analitikisht në teorinë kirale të perturbimit (Smilga, Stern, 1993; Osborn *et al*, 1999). Në vëllim të pafundëm, teoria kirale e perturbimit jep një zbrërthim të dendësisë spektrale përgjithësisht në fuqi të  $\lambda$  dhe  $m$ . Termi kryesor jepet nga formula Banks – Keshner e cila lidh numrin e modeve me “kondensatin efektiv” si më poshtë:

$$\Sigma_{eff} = \frac{\pi \nu(\Lambda)}{2 \Lambda V}$$

ku  $\Lambda = \sqrt{M^2 - m^2}$ , është prerja e zgjedhur për vlerat vetjake të vogla. Në prezencë të një fushe të dhënë kalibruese, numri i modeve vetjake të operatorit  $D_m^\dagger D_m$  me vlera vetjake  $\alpha \leq M^2$  mund të përcaktohet duke llogaritur numerikisht vlerat vetjake dhe multiplicitetin e tyre. Në këtë rast duhet të kemi parasysh se llogaritja rritet në mënyrë proporcionale me fuqinë e dytë të vëllimit  $V$ .

### Algoritmi i vlerësimit të kondensatit

#### Algoritmi për kuadraturën Gauss – Lanczos

Llogariten  $\alpha_i$  dhe  $\beta_i$  duke përdorur algoritmin e Lanczos për  $Ax=b$

$$\text{Përcaktohen } (T_n)_{i,i} = \alpha_i \quad (T_n)_{i+1,i} = (T_n)_{i,i+1} = \beta_i \quad (T_n)_{i,j} = 0$$

Llogariten vlerat vetjake  $\lambda_i$  dhe vektorët vetjake  $v_i$  të matricës  $T_n$ , ku  $i=1 \dots n$

Renditen vlerat vetjake dhe vektorët vetjakë korrespondues sipas rendit rritës të vlerave vetjake.

Përcaktohet  $k$  si indeksi maksimal që  $i$  korrespondon vlerës vetjake të zgjedhur si prerje

Përcaktohen  $\theta_i$  si rrënja katrore pozitive e vlerave vetjake origjinale

Përcaktohen  $z_i$  si elementët e parë të vektorëve vetjake  $v_i$ ,  $i=1 \dots n$

Përcaktohet  $\omega_i = z_i^2$  ku  $z_i$  – elementët e parë të vektorëve vetjake

Llogaritet numri i modeve  $\nu_k = \sum_{i=1}^k \omega_i$

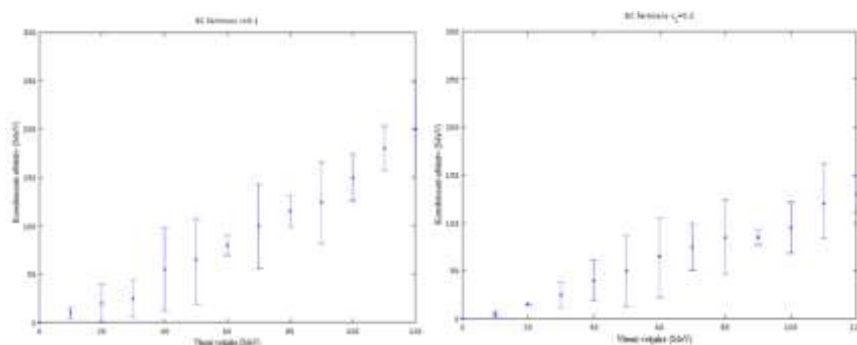
Si kusht për ndalimin e algoritmit të Lançosit kemi kërkuar që mbetja të jetë më e vogël se  $\text{tol} = 10^{-3}$ . Kjo për arsye sepse numri i modeve të operatorit të Dirakut brenda gabimit të bërë për 1000 konfiguracione, nuk ndryshon edhe për vlera të ndryshme të tolerancës.

### Rezultate dhe diskutime

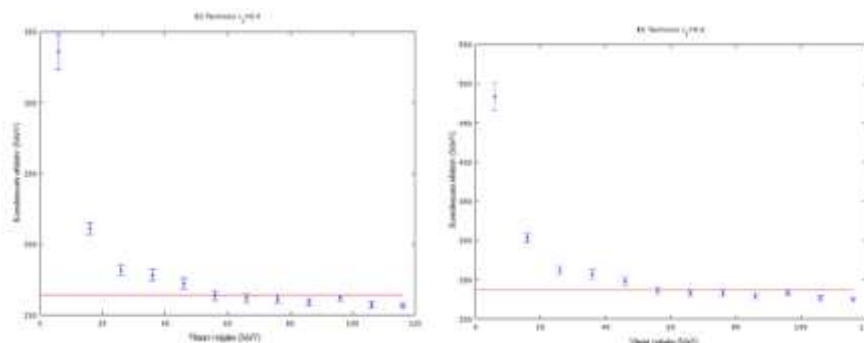
Simulimet dhe llogaritjet janë kryer për vlerat e kundërtermimit  $c_3 = 0.1, 0.2, 0.35, 0.4, 0.6, 0.8$  dhe 1, në rrjeta  $16^4$  dhe  $\beta=6$ , për 1000 konfiguracione kalibruese, të gjeneruar duke përdorur teorinë SU (3) në secilin rast. Rezultatet janë mesatarizuar sipas 1000 konfiguracioneve.

Llogaritjet janë realizuar në në mini - serverin e grupit të Fizikës Llogaritëse, të fituar me anë të projektit “Simulimi i fermioneve kirale në multiprosesorë”, financuar nga Fakulteti i Shkencave të Natyrës, superkompjuterin GALILEO në qendrën CINECA si dhe sistemin paralel të Fakultetit të Teknologjisë së Informacionit, Universiteti Politeknik i Tiranës.

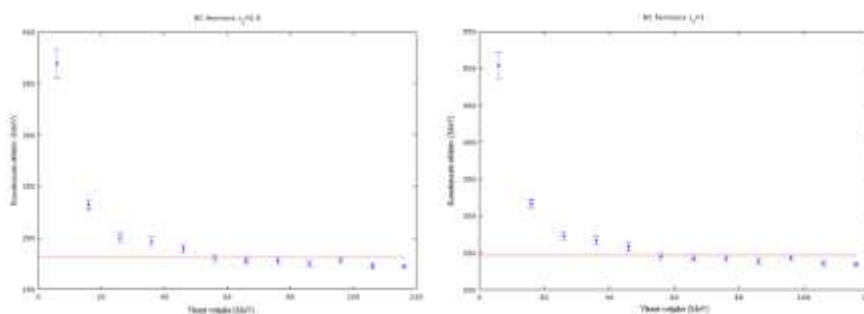
Metodologjia e përdorur është ajo e përshkruar në seksionin e mësipërm. Janë përdorur vlerat e mësipërme të kundërtermimit  $c_3$  dhe shihet se për cilën vlerë të këtij kundërtermi kemi thyerje spontane të simetrisë kirale në mënyrë dinamike. Më poshtë tregohet varësia e kondensatit kiral nga vlerat vetjake të operatorit të Dirakut për vlera të ndryshme të koeficientit  $c_3$ . Për secilin rast është bërë dhe grupimi i të dhënave sipas peshave përkatëse dhe merren grafikët e mëposhtëm:



**Figura 2.** Varësia e kondensatit kiral nga vlerat vetjake për fermionet e BC kur kemi grupimin e të dhënave me anë të peshave për a)  $c_3=0.1$ , b)  $c_3=0.2$ . Vihet re që kondensati kiral shkon drejt zeros për modet e ulta të operatorit BC



**Figura 3.** Varësia e kondensatit kiral nga vlerat vetjake për fermionet e BC kur kemi grupimin e të dhënave me anë të peshave për a)  $c_3=0.4$ , b)  $c_3=0.6$ . Vihet re që modet e ulta të operatorit BC kondensojnë dhe kondensati kiral ka një vlerë të ndryshme nga zero



**Figura 4.** Varësia e kondensatit kiral nga vlerat vetjake për fermionet e BC kur kemi grupimin e të dhënave me anë të peshave për a)  $c_3=0.8$ , b)  $c_3=0.1$ . Vihet re që modet e ulta të operatorit BC kondensojnë dhe kondensati kiral ka një vlerë të ndryshme nga zero

Siç vihet re, simulimet dhe llogaritjet tregojnë se për vlera të kundërtermit  $c_3 < 0.4$ , varësia e dendësisë spektrale (numrit të modeve në rastin tonë) është lineare dhe për vlera vetjake të vogla nuk kemi formim të kondensatit. Ndërkohë për  $c_3 \geq 0.4$ , vihet re se modet e ulta të operatorit të Dirakut kondensojnë njësoj si parashikohet nga teoria kirale e perturbimit.

Në fillim të këtij kapitulli theksuam se mungesa e simetrisë hiperkubike pengon krijimin e çifteve kuark - antiquark, dhe rrjedhimisht të kondensatit, e si pasojë simetria kirale qëndron ekzakte. Kushtet e krijimit të kondensatit krijohen vetëm në qoftë se simetria e Lorencit është e pranishme, çka do të thotë se vlera e kundërtermit  $c_3 = 0.4$  të shtuar në operatorin në studim, për të cilën realizohet thyerja në mënyrë dinamike e simetrisë kirale, na siguron që jemi në fazën e duhur.

Nga ana tjetër, përcaktimi i rivendosjes së plotë të simetrisë së Lorencit kërkon një studim të veçantë. Përfshirja e të dy parametrave në studim kërkon përfshirjen e masave të pi – mezoneve të ngarkuar. Punimi ynë

vendos bazën metodologjike të studimeve më të hollësishme me fermionet minimalisht të dubluara.

### **Përfundime**

Simetria kirale dhe thyerja e saj në mënyrë spontane ka një rol kyç në QCD.

Kondensati kiral shërben si parametër renditjeje për fermionet kirale BC dhe na ndihmon për të gjetur kundërkufizat e përshtatshme që rivendosin simetrinë hiperkubike.

Përdorimi i kuadraturës së Lançosit dhe relacioni Banks-Casher na lejojnë të eksplorojmë mekanizmin e thyerjes së simetrisë kirale në mënyrë dinamike si dhe gjejmë kundërtermat e përshtatshëm në veprim për të cilat kemi thyerje spontane të simetrisë kirale dhe rrjedhimisht simetri të plotë të grupit hiperkubik.

Përdorimi i metodologjisë së propozuar në këtë tezë na siguron një kosto llogaritëse minimale për rivendosjen e simetrisë hiperkubike, çka jep mundësi që këto lloj fermionesh të mund të përdoren nga komuniteti i rrjetës, si një formulim efikas i fermioneve rrjetore.

Vlera e kundërtermit  $c_3$  të shtuar në operatorin në studim, për të cilën realizohet thyerja në mënyrë dinamike e simetrisë kirale, na siguron që jemi në fazën e duhur dhe kemi vendosur pjesërisht simetrinë hiperkubike.

Vlera e koeficientit  $c_3$  që rivendos pjesërisht simetrinë e Lorencit varet nga rrjeta dhe konstantja e çiftimit me të cilën punojnë. Kjo do të thotë që rezultatet që ne japin nuk janë rezultatet për limitin e vazhduar dhe vëllim të pafundëm, por për një rrjetë dhe konstante të dhënë.

Punimi ynë vendos bazën metodologjike të studimeve më të hollësishme me fermionet minimalisht të dubluara.

### **Literatura**

Artan Borici. (2008): Minimally Doubled Fermion Revival. PoS, LATTICE2008:231

Frank Wilczek. (1987): On lattice fermions. Phys. Rev.Lett., 59:2397

Leonardo Giusti and Martin Lüscher. (2009): Chiral symmetry breaking and the Banks-Casher relation in lattice QCD with Wilson quarks. JHEP, 0903:013

H. B. Nielsen and M. Ninomiya, (1981): Nucl. Phys. B185 20; Erratum Nucl. Phys.B195 (1982) 541

J. C. Osborn, D. Toublan, and J. J. M. Verbaarschot. (1999): From chiral random matrix theory to chiral perturbation theory. Nuclear Physics B 540.1-2; 317-344

Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. Phys. Rev., D10:2445–2459, 1974

M. Creutz, Quarks, Gluons, and Lattices, (1983): Cambridge University Press

Michael Creutz. (2008): Four-dimensional graphene and chiral fermions. JHEP, 0804:017



Zeqirllari, R., Buzi, I., Borici, A. (2011): Ndikimi i thyerjes së simetrisë hiperkubike në masat e  $\pi$  dhe  $\rho$  mesoneve prej simulimeve me veprime minimalisht të dubluara, AKTET IV, 3: 392 - 396

R. Zeqirllari, A. Boriçi, (2014): Numerical Study of the Breaking Mass of Hyper - Cubic Symmetry for the Minimally Doubled Fermions Boriçi – Creutz, Open Journal Of Modern Physics, Vol 1, Number 2; 96 -104

Stefano Capitani, Michael Creutz, Johannes Weber, and Hartmut Wittig. (2010): Renormalization of minimally doubled fermions. JHEP, 1009:027

Tom Banks and A. Casher. (1980): Chiral Symmetry Breaking in Confining Theories. Nucl. Phys., B169:103