NJË REZULTAT MBI EKZISTENCËN E PIKAVE FIKSE NË HAPËSIRAT PSEUDO KUAZI n-NORMUARA

SILVANA LIFTAJ., LINDITA MUKLI., OSMAN HYSA.

Departamenti i Matematikës, Fakulteti i Teknologjisë së Informacionit, Universiteti "Aleksandër Moisiu", Durrës

e-mail: silvanaliftaj@yahoo.com

Përmbledhje

Në këtë punim tregohet një rezultat mbi ekzistencën e pikave fikse në hapësirat pseudo kuazi n-normuara të një funksioni asimptotikisht të rregullt.

Fjalëkyçe: Hapësirë pseudo kuazi n-normuar, 2-normë, pikë fikse, funksion asimptotikisht i rregullt

Abstract

In this paper, we have proved a neë result on existence of fixed point of an asymptotically regular function in pseudo quasi n-normed space.

Key words: Pseudo quasi n – normed space, 2-norm, fixed point, asymtotically regular function

1. Hyrje

Koncepti i hapësirave 2- normuara fillimisht u paraqit nga Gahler S. në vitet '60 të shekullit të kaluar, duke u përgjithsuar më vonë nga Gunawan, H. dhe Mashadi., M. në konceptin e hapësirave n-normuara.

Lidhur me këto hapësira, krahas studimeve me karakter topologjik të tyre, një interes të veçantë ka qenë aplikimi i teorisë së pikës fikse në to.

Një përgjithësim i mëtejshëm i këtyre hapësirave, janë hapësirat pseudo kuazi n – normuara të dhënë nga autorët Hoxha. E, Liftaj. S në 2014.

Autorët Liftaj, *et.al* (2013) dhanë një rezultat të zbatimit të teoremës së pikës fikse në hapësirat 2- Banach, i cili është një përgjithësim i një punimi të autorëve Mantu *et.al* (2012).

Më poshtë jepen disa njohuri paraprake.

Përkufizim 1.1. Gunawan, & Mashadi, (2001). Le të jetë E hapësirë lineare me dimE $\geq$ n $\geq$ 2, n$\in N$.

Funksioni $\|.,\dots,.\|: E^n \to R^+$ quhet n- normë në qoftë se plotëson kushtet e mëposhtme:

1) $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = 0$, vetëm kur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ është linearisht e varur, $x_k \in E,\ k = 1,2,\ldots, n.$

2) $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ është invariante në lidhje me përkëmbimet $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_k \in E,\ k = 1,2,\ldots, n.$

3) $\|\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \alpha\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ për çdo $\alpha \in R$, $x_k \in E,\ k = 1,2,\ldots, n.$

4) $\|x + y, x_2, \ldots, x_n\| \leq \|x, x_2, \ldots, x_n\| + \|y, x_2, \ldots, x_n\|$, për çdo $x, y, x_2, x_3, \ldots, x_n \in E.$

Çifti (E, $\|.,\ldots,.\|$) quhet hapësirë e n-normuar.

Përkufizim 1.2. Gunawan, H., Mashadi, M.(2001)Le të jetë (E, $\|.,\ldots,.\|$) hapësirë e n-normuar.

Vargu $\{x_k\}_{k\in N}$ quhet varg Koshi në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $p \in N$, që për çdo $k, l \in N,\ k > p,\ l > p$ kemi $\|x_k - x_l, x_2, \ldots, x_n\| < \varepsilon$, ku $x_2, x_3, \ldots, x_n \in E.$

Përkufizim 1.3. Gunawan, H., Mashadi, M.(2001)

a) Hapësira e n-normuar quhet hapësirë e plotë në qoftë se çdo varg Koshi në të është konvergjent.

b) Çdo hapësirë e n-normuar e plotë quhet hapësirë n-Banach.

Përkufizim 1.4. Hoxha. & Liftaj., (2014) Funksioni $\|.,\ldots,.\|: E^n \to R^+$ ku E është hapësirë vektoriale me dim E =d ≥n quhet funksion pseudo-kuazi-n normë në qoftë se plotësohen kushtet e mëposhtme:

1) Në qoftë se $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_k \in E,\ k = 1,2,\dots,n$ është linearisht e varur, atëherë $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = 0$.

2) Për çdo përkëmbim të elementeve të $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\|x_1, x_2, \dots, x_n\|$ është e pandryshueshme.

3) $\|\alpha x_1, x_2, \dots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, x_2, \dots, x_n\|$ për çdo $\alpha \in R$, $x_k \in E,\ k = 1,2,\dots,n$.

4) Ekziston q ≥ 1, q konstante, që për çdo $x, y, x_2, x_3, \dots, x_n \in E$

$$\|x+y, x_2, \dots, x_n\| \le q(\|x, x_2, \dots, x_n\| + \|y, x_2, \dots, x_n\|)$$

Shembull 1.1: Le të jetë $C_R$hapësira vektoriale e funksioneve të kufizuara në R. Pasqyrimi $\|., \dots, .\|: C_R^n \to R$ i përcaktuar si mëposhtë:

$$\|f_1, f_2, \dots, f_n\| = \begin{cases} 0, & \text{për } \{f_1, f_2, \dots, f_n\}\ lv \\ q\sup|f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)|, & \text{për } \{f_1, f_2, \dots, f_n\}\ lpv \end{cases}$$

ku $q \ge 1$, q konstante, është pseudo kuazi n-normë.

Nëse marrim $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, ku $f_k \in C_R$, $k \in \{1,2,\dots,n\}$, ku

$$f_k(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{për } (k-1)\pi < x < k\pi \\ 0, & \text{për } x \le (k-1)\pi \ \text{ ose } x \ge k\pi \end{cases}$$

Vihet re që ky është një sistem lpv, ku vlera e pseudo-kuazi n-normës është zero.

Le të jetë (E, $\|., \dots, .\|$) një hapësirë pseudo kuazi n-normuar ku dim E = d ≥ n ≥ 2.

.**Përkufizim 1.5.** Harikrishnan, P. , Ravindran, K. T, (2011) Le të jetë (E, $\|., \dots, .\|$) një hapësirë 2-normuar. Pasqyrimi $T: E \to E$ quhet pasqyrim kontraktiv në qoftë se ekziston c kostante 0 < c < 1, e tillë që:

$\|Tx - Ty, z\| \le c\|x - y\|, \forall x, y, z \in E$.

Përkufizim 1.6. Panja, & Baisnab,(1978) Pasqyrimi $T: E \to E$ quhet asimptotikisht i rregullt në një pikë $x_0 \in E$ në qoftë se

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n(x_0) - T^{n+1}(x_0), y\| = 0,\ \forall y \in E$$

ku $T^n(x_0)$shënohet iteracioni i n-të i përbërjes së *T*-së në x_0)

Teoremë 1.1 Saha *et.al* (2012). Le të jetë (E, $\|.,\dots,.\|$) një hapësirë 2-Banach dhe $T: E \to E$ një pasqyrim asimptotikisht I rregullt në një pikë të E, i tillë që për çdo $x, y, z \in E$ kemi:

$$\|Tx - Ty, z\| \le \alpha(\|x - Tx, z\| + \|y - Ty, z\|) + \beta\|x - y, z\| + \gamma \max\{\|x - Ty, z\|, \|y - Tx, z\|\}$$

ku $\alpha,\ \beta,\ \gamma \ge 0$ të tilla që $\max\{\alpha, \beta\} + \gamma < \frac{1}{2}$, atëherë T ka një pikë fikse të vetme në E.

Duke u bazuar në Roades Rhoades, (1979), kushti i mëposhtëm:

$$\|Tx - Ty, z\| \le h\max\{\|x - Tx, z\|,\ \|y - Ty, z\|,\ \|x - Ty, z\|,\ \|y - Tx, z\|,\ \|x - y, z\|\},\ 0 < h < 1$$

është kusht më i përgjithsuar kontraktiviteti se ai i përdorur në rezultatin e Saha *et.al* (2012).

2. Rezultatet

Në vijim japim rezultatin tonë në hapësirat pseudo kuazi n – normuara për funksionet asimptotikisht të rregullt.

Përkufizim 2.1. Funksioni pseudo kuazi n - normë ka vetinë (*) në qoftë se për çdo relacion $\|a, x_2, x_3, \dots, x_n\| < \varepsilon$, ku $x_2, x_3, \dots, x_n$ të çfarëdoshëm në E, dhe $\varepsilon > 0$ merret $a = 0$.

Teoremë 2.1. Le të jetë (E, $\|.,\dots,.\|$) një hapësirë pseudo kuazi n-Banach me koefiçient c ≥ 1, $T: E \to E$ të tillë që:

(i) Hapësira gëzon vetinë $(*)$

(ii) Për çdo $x, y,\ x_2, x_3, \dots, x_n \in E$, kemi që:

$$\|Tx - Ty, x_2, x_3, \dots, x_n\| \le h\max\{\|x - Tx, x_2, x_3, \dots, x_n\|,\ \|y - Ty, x_2, x_3, \dots, x_n\|,\ \|x - Ty, x_2, x_3, \dots, x_n\|,\ \|Tx - y, x_2, x_3, \dots, x_n\|,\ \|x - y, x_2, x_3, \dots, x_n\|\},\ \text{ku } 0 \le h < \frac{1}{2c}$$

(iii) Pasqyrimi $T: E \to E$ është asimptotikisht i rregullt në një pikë $a \in E$.

Atëherë T ka një pikë fikse të vetme në E.

Vërtetim. Le të jetë T një pasqyrim asimptotikisht i rregullt në një pikë $a \in E$. Kemi që për çdo $r \in N, s \in N$:

$$\|T^r(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\| = \|T(T^{r-1}(a))-T(T^{s-1}(a)),x_2,\dots,x_n\|$$
$$\le h\max\{\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|,\|T^{s-1}(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|,$$
$$\|T^{r-1}(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|,\|T^{s-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|,\|T^{r-1}(a)-T^{s-1}(a),x_2,\dots,x_n\|\}$$

Duke u bazuar në aksiomën 4 të pseudo kuazi normës, kemi që:

$$\|T^r(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|$$
$$\le h\max\{\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|,\|T^s(a)-T^{s-1}(a),x_2,\dots,x_n\|,$$
$$c[\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^r(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|],$$
$$c[\|T^{s-1}(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^s(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|],$$
$$c^2[\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^r(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^s(a)-T^{s-1}(a),x_2,\dots,x_n\|]\}$$
$$\le hc^2\,h\max\{\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|,\|T^s(a)-T^{s-1}(a),x_2,\dots,x_n\|,$$
$$[\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^r(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|],$$
$$[\|T^{s-1}(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^s(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|],$$
$$[\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^r(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^s(a)-T^{s-1}(a),x_2,\dots,x_n\|]\}$$

Pas kryerjes së veprimeve kemi:

$$(1-hc^2)\|T^r(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\| \le hc^2\{\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^s(a)-T^{s-1}(a),x_2,\dots,x_n\|\}$$

Prej nga:

$$\|T^r(a)-T^s(a),x_2,\dots,x_n\| \le \frac{hc^2}{1-hc^2}\{\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|+\|T^s(a)-T^{s-1}(a),x_2,\dots,x_n\|\}$$

Kalojmë në limit për $r\to\infty, s\to\infty$, duke përdorur rregullsinë asimptotike të T në pikën $a\in E$, kemi që vargu $\{T^r(a)\}_{r\in N}$ konvergjon ipas pseudo kuazi n normës në një pikë $b\in E$, pra $\lim_{r\to\infty} T^r(a)=b$, ku $b\in E$.

Të tregojmë që $T(b)=b$.

Duke përdorur aksiomën 4) të pseudo kuazi n-normës dhe kushtin e teoremës kemi:

$$\begin{aligned}\|b-T(b),x_2,\dots,x_n\| &\le c[\|b-T^r(a),x_2,\dots,x_n\| \\ &+\|T^r(a)-T(b),x_2,\dots,x_n\|] \\ &= c\big[\|b-T^r(a),x_2,\dots,x_n\| \\ &+\big\|T\big(T^{r-1}(a)\big)-T(b),x_2,\dots,x_n\big\|\big] \\ &\le c[\|b-T^r(a),x_2,\dots,x_n\| \\ &+hmax(\|T^{r-1}(a)-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|\|\|b \\ &-T(b),x_2,\dots,x_n\|,\|b \\ &-T^n(a),x_2,\dots,x_n\|,\|T^{r-1}(a) \\ &-T(b),x_2,\dots,x_n\|,\|T^{r-1}(a)-b,x_2,\dots,x_n\|]\end{aligned}$$

Duke kaluar në limit kur $r\to\infty$ dhe meqë hapësira gëzon vetinë (*), kemi që

$$\lim_{r\to\infty}\|b-T^r(a),x_2,\dots,x_n\|=0$$

$$\lim_{r\to\infty}\|T^{r-1}(a)-T(b),x_2,\dots,x_n\|=0$$

Pra, $\lim\limits_{r\to\infty}T^r(a)=b$.

Kështu që:

$$\begin{aligned}\|b-T(b),x_2,\dots,x_n\| &\le hmax\{\|b-T(b),x_2,\dots,x_n\|,\|b \\ &-T(b),x_2,\dots,x_n\|\|b-T(b),x_2,\dots,x_n\|\} \\ &\le h\|b-T(b),z\|,0<h<\frac{1}{2c}\end{aligned}$$

Nga vetia (*), kemi që *b* është pikë fikse e pasqyrimit *T* në *E*.

Uniciteti i *b*-së.

Supozojmë të kundërtën. Le të jetë $c\in E$ e tillë që $T(c)=c,\ c\neq b.$ Kemi që:

$$\begin{aligned}\|b-c,x_2,\dots,x_n\|=\|T(b)-T(c),z\| &\le hmax\{\|b-T(b),x_2,\dots,x_n\|,\|c \\ &-T(c),x_2,\dots,x_n\|,\|b-T(c),x_2,\dots,x_n\|,\|c \\ &-T(b),x_2,\dots,x_n\|\}\end{aligned}$$

Pra

$$\begin{aligned}\|b-c,x_2,\dots,x_n\|=\|T(b)-T(c),z\| &\le hmax\{\|b-c,x_2,\dots,x_n\|,\|c-b,x_2,\dots,x_n\|,\|b \\ &-c,x_2,\dots,x_n\|\}\le h\|b-c,x_2,\dots,x_n\|\end{aligned}$$

ku, $0<h<\frac{1}{2c}, c>1$.

Pra kemi një absurditet, prej nga rrjedh $b = c$.

Përfundime

Rezultati ynë i dhënë në Teoremën 2.1, përgjithson rezultatin e dhënë nga autorët Mantu *et.al* 2012 dhe rezultatin e dhënë në 2013 nga autorët Liftaj, *et.al* sepse hapësira e teoremës tonë dhe kushti i kontraktivitetit janë më të përgjithsuara se kushtet e teoremave të treguar nga këta autorë.

Literatura

Gunawan, H., Mashadi, M. (2001): On n-normed space, Int. J. Math. Sci 27(10), 631-639

Hoxha. E, Liftaj. S, (2014): On completion in pseudo quasi n – normed space, International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology (ICEMST), Konya, Turkey, May 16-18, 2014

Harikrishnan, P., Ravindran, K. T, (2011): Some properties of Açretive operators in Linear 2-normed spaces, International Mathematical Forum, vol 6 no 59, 2941-2947.

Panja, C. and Baisnab, A. P, (1978): Asymtotic regularity and fixed point theorems, The Matematics student, 46 1, 54-59

Saha, M. , Dey. D,. Ganguly, A., Debnath, L .(2012): Asymtotic regularity and fixed point theorems on a 2 Banach space, Surveys in Mathematics and its Applications, 7, 31-38

Rhoades, B. E (1979): Contractive type mappings on a 2-metric space, Math Nachr., 91, 151-155