# ANALIZË E BIFURKIMEVE TË NJË SISTEMI DINAMIKE JOLINEARE TË VAZHDUESHME SHUMË PËRMASORE

**VALENTINA SHEHU.**

Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës Departamenti i Matematikës

e-mail: valentina.shehu@fshn.edu.al

**Përmbledhje**

Sistemet Dinamike karakterizohen nga ligjësia që jepet me familjet e funksioneve $f_a(x)$ që është funksion i dy ndryshoreve: parameteri a and vektor $\mathbf{x} \in R^n$, dhe një interes të veçantë kanë pikat ku pikat e ekuilibrit që ndryshojnë qëndrueshmërinë e tyre ose kur numri i pikave të ekuilibrit ndryshon. Në këtë rast ndodh bifurkimi d.m.th. ndryshimi fare i vogël i parametrit (parametri i bifurkimit) të sistemit shkakton një ndryshim "cilësor" ose topologjik në sjelljen e tij. Në përgjithësi në një bifurkim qëndrueshmëria locale, pikat periodike ose bashkësitë e qëndueshme ndryshojnë.Në këtë punim fillimisht do të paraqit disa rezultate teorike dhe në vazhdim do ti zbatojmë këto rezultate në disa shembuj konkretë sistemesh dinamike jolineare me shumë përmasa me kohë të vazhdueshme.

**Fjalëkyçe**: Sistemet Dinamike, qëndrueshmëria lokale, parametri i bifurkimit, jolinear me shumë përmasa.

**Abstract**

In a Dynamical System if we have a family of functions $f_a(x)$ as a function of two variables: parameter a and vector $\mathbf{x} \in R^n$, of particular interest are the values of where the equilibrium points go from being stable to unstable, or from being unstable to stable, or when the number of these equilibrium points change. So a bifurcation oçurs when a small smooth change made to the parameter values (the bifurcation parameters) of a system causes a sudden "qualitative" or topological change in its behaviour. Generally, at a bifurcation, the local stability properties of equilibrium, periodic orbits or other invariant sets changes. In this paper we first present the theoretical results in a abstract way and will apply this results to concrete problems of nonlinear dynamical systems of higher dimensional.

**Key words**: Dynamical System, local stability, bifurcation parameters, nonlinear higher dimensional.

## Hyrje

Koncepti i sistemit dinamik është formalizimi matematik i një procesi shkencor deterministic. E ardhmja dhe e kaluara e shumë sistemeve fizike, ekonomike, kimike, biologjike, ekologjike dhe bile edhe shoqërore mund të parashikohet në një nivel të caktuar duke njohur gjëndjen e momentit dhe ligjësinë që përcakton ecurinë e procesit. Duke pranuar që këto ligjësi nuk ndryshojnë në kohë, sjellja e këtyre proceseve mund të përcaktohet plotësisht nga gjëndja fillestare. Hirsch Morris *et.al* (2004)

Duke u shprehur matematikisht sistemi dinamik në E është një $C^1$ -funksion

$\varphi : E \times R \rightarrow E$

$\varphi(t, x)$ i përcaktuar për çdo t $\epsilon$ $R$ dhe E $\subset R^n$ , që plotëson kushtet

(i) $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ për çdo $\mathbf{x}$ $\epsilon E$.

(ii) $\varphi_t \circ \varphi_s(\mathbf{x}) = \varphi_{t+s}(\mathbf{x})$ për çdo s, t dhe $\mathbf{x}$ $\epsilon E$.

Duket qartë që $\varphi(t, x)$ është një familje diffeomorfiznash në E, d.m.th. gjendet një $C^1$ i anasjelltë $\phi_{-t}$

Mënyra më e thjeshtë e përcaktimit të një sistemi dinamik është me anë të sistemeve të ekuacioneve diferenciale, n.q.s. A është një matricë katrore me $n \times n$ atëhere funksionet $\varphi(t, \mathbf{x}) = e^{At}\mathbf{x}$ përcaktojnë një system dinamik në $R^n$, për më tepër:

Për çdo $\mathbf{x}_0 \epsilon R^n, \varphi(t, \mathbf{x}_0)$ është zgjidhje e sistemit dinamik linear **x’** = A **x** dhe **x** (0) = $\mathbf{x}_0$. Në këtë rast kemi një system ekuacionesh diferenciale të zakonshme.

Në përgjithësi n.q.s. $\varphi(t, \mathbf{x})$ është një sistem dinamik në E $\subset R^n$, atëhere funksioni:

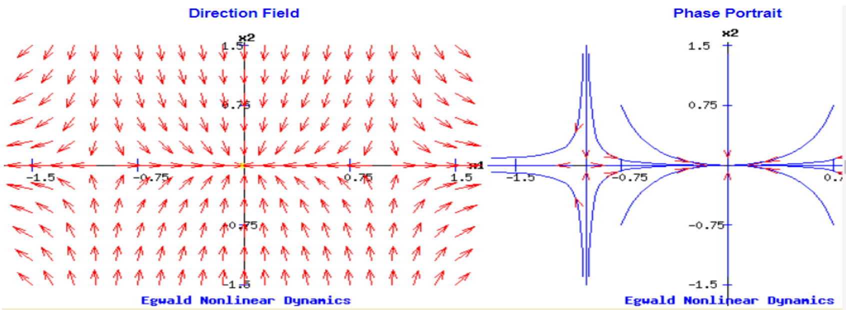
f(**x**) = $\frac{\delta \varphi(t,\mathbf{x})}{\delta t}|_{t=0}$

Përcakton një $C^1$ fushë vektoriale në E për çdo $\mathbf{x}_0 \epsilon E$, $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ is the solution of the initial value problem

**x’** = f(**x**) and **x**(0) = $\mathbf{x}_0$ (1)

$\varphi(t, \mathbf{x})$ quhet rrjedhë e ekuacionit diferencial (1) ose rrjedhë e fushës vektoriale f(**x**).

Ilustrimi i mëposhtëm i një fushe drejtimesh dhe portreti i fazës së një sistemi dinamik jolinear marre nga Egwald Nonlinear Dynamics (2017)




**Figurë**. Fusha e drejtimeve dhe portreti i fazës të një sistemi dinamik jolinear

Në këtë rast kemi që sistemi dinamik $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ përcaktohet nga (1). Nga ana tjetër nga Teorema Globale e Ekzistencës Perko L. ( 2001) është provuar e anasjellta që $C^1$- fushë vektoriale në $R^n$ përcakton një sistem dinamik $R^n$. N.q.s. zgjidhjet $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ të sistemit (1) mund të mos jenë përcaktuar pë çdo $t \epsilon R$, koha mund të shtrihet pëgjatë trajektoreve të (1) duke marrë një sistem dinamik topologjikisht ekuivalent zgjidhjet e të cilit jaë përcaktuar për çdo t.

Teoremë. N.q.s. f $\in C^1(R^n)$ që për çdo $\boldsymbol{x}_0 \in R^n$, problemi i vlerës fillestare

**x’** $= \frac{f(\mathbf{x})}{1+|f(\mathbf{x})|}$ dhe **x** (0) = $\boldsymbol{x}_0$

ka një zgjidhje të vetme **x** (t) e përcaktuar pë çdo t $\in R,$ d.m.th. përcakton një sistem dinamiknë $R^n$, pë më tepër ky sistem është topologjikisht ekuivalent me **x’** = f(**x**) and **x** (0) = $\boldsymbol{x}_0$ on $R^n$.

Duke shqyrtuar sistemin dinamik të pavarur nga koha në trajtën vektoriale:

**x’** = f(**x**)

për f $\in C^1(E)$ ku E është një bashkësi e hapur në $R^n$. Me kushte vërtet të përgjithshme zgjidhjet e tj përcaktojnë një sistem dinamik me kohë të vazhdueshmecal systems. Shumë pak sisteme ekuacionesh diferenciale mund të zgjidhen në mënyrë të shtjellur me fuksione elementare.

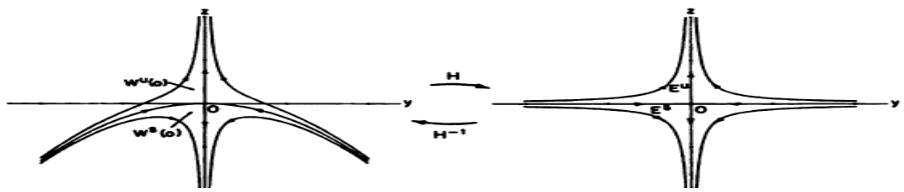
Teorema Globale e Ekzistencës provon që ky sitem përcakton një sistem dinamik $\varphi(t, \mathbf{x})$ në E. Atëhere:

- Për çdo **x** $\in E$, funksioni $\varphi(t, \boldsymbol{x}_0)$ : R → E përcakton një vijë të zgjidhjes, trajektore ose orbitë të (1) që kalon nga pika $\boldsymbol{x}_0$ në E.

- $\Gamma(\boldsymbol{x}_0) = \{\mathbf{x} \in E | x = \varphi(t, \boldsymbol{x}_0), t \in R\}$ quhet grafik ose trajektore që e mendojmë si lëvizje përgjatë kësaj vije.

Kujtojmë konceptin e ekuivalencës topologjike të sistemeve dinamike eqiuvalence:

N.q.s. f $\in C^1(E_1)$ dhe g $\in C^1(E_2)$ ku $E_1$, $E_2$ janë bashkësi të hapura të $R^n$. Atëhere dy sistemet e pavarur nga koha **x'** = f(**x**) (1) dhe **x'** = g(**x**) (2) janë topologjikisht ekuvalente n.q.s. gjendet një homeomorfizëm H : $E_1 \to E_2$ i cili pasqyron trajektoret e (1) tek trajektoret e (2) duke ruajtur orientimin në kohë.




**Figurë**. Dy sisteme dinamike topologjikisht ekuivalente afër origjinës.

Teorema Hartman-Grobman Theorem është një rezultat shumë i rëndësishëm në teorinë e sistemeve dinamike. Teorema provon që afër një pike hiperbolike $\breve{\boldsymbol{x}}$ sistemi jolinear

**x'** = f(**x**)

ka të njëjtën strukturë topologjike cilësore si sistemi linear:

**x'** = Jf($\breve{\boldsymbol{x}}$) **x**

N.q.s. kemi një sistem linear n- përmasor **x'** = A **x** me një pikë ekuilibri të vetme në origjinë mund të vërejmë sjellje të ndryshme të sistemit siç janë pikat saddle, spiralet, ciklet, vatrat, nyjet që janë sqaruar mire. Këto klasifikohen në varësi të të vlerave të veta të matricës A. Për sistemet jolineare sjellja e sistemit është më e komplikuar për tu studjuar. Fatmirësisht nuk nuk mbetemi plotësisht në erresirë, duke gjetur matricën Jakobian ose “derivatin total” që i përket sistemit dhe e llogaritim në pikën e ekuilibrit duke marrë një sistem linear me matricën karakteristike të koeficientëve. Teorema Hartman Grobman provon që të paktën në një zone rrethuese të një pike ekuilibri për të cilin matrica Jakobian i ka tërë vlerat e veta mw pjesën reale të ndryshme nga zero.atëhere mund të përcaktojmë sjelljen e sistemit dinamik të sistemit jolinear.

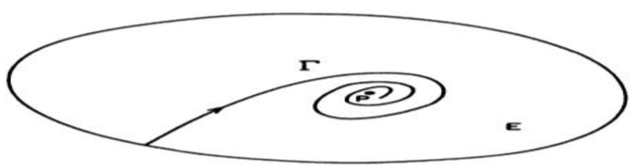
Përkufizim. f $\in C^1(E)$ dhe **x'** = f(**x**) (1) atëhere:

- Një pikë $\breve{\boldsymbol{x}} \in R^n$ quhet pikë ekuilibri e (1) n.q.s. f($\breve{\boldsymbol{x}}$) = 0.

- Një pikë ekuilibri $\breve{\boldsymbol{x}}$ quhet hiperbolike e (1) n.q.s. asnjë nga vlerat e veta të matricës Jacobian Jf($\breve{\boldsymbol{x}}$) e ka pjesën reale zero.
- Një pikë ekuilibri $\breve{\boldsymbol{x}}$ e (1) quhet pikë johiperbolike n.q.s. gjendet një vlerë e vetë e Matricës Jakobian JF($\breve{\boldsymbol{x}}$) që ka pjesë reale zero.
- Sistemi linear me matricë A = Jf($\breve{\boldsymbol{x}}$) quhet linearizim i (1) në pikën $\breve{\boldsymbol{x}}$.

Teoremë (Hartman Grobman) Portreti i fazës të dysistemeve dinamike afër dy pikave hiperbolike $\breve{\boldsymbol{x}}$ dhe $\breve{\boldsymbol{y}}$ janë topologjikisht ekuivalente lokalisht atëhere dhe vetëm atëhere kur pikat e ekuilibrit kanë të njëjtin numër vlerash të veta të matricave Jakobian me Re $\lambda < 0$ dhe me Re $\lambda > 0$, përkatësisht.

Do të përdorim simbolin $\Gamma(\boldsymbol{x}_0) = \{\varphi(t, \boldsymbol{x}_0) \in R^n | t \in R\}$ si trajektore të sistemit dinamik që kalon në pikën $\boldsymbol{x}_0$ në momentine kohës t = 0 dhe vizatojmë ate në nënbashkësinë E të hapësirës së fazës $R^n$ me një shigjetë që tregon drejtimin e rritjes së kohës t përgjatë trajektores $\Gamma$ si në figurë:




**Figurë**. Një trajektore $\Gamma$ që konvergjon drejt pikës limite $\omega$ ∈E për t → ∞.

Vijat $\Gamma$ ndahen në dy pjesë:

$\Gamma(\boldsymbol{x}_0)^+ = \{x \in E | x = \varphi(t, \boldsymbol{x}_0), t \geq 0\}$ dhe
$\Gamma(\boldsymbol{x}_0)^- = \{x \in E | x = \varphi(t, \boldsymbol{x}_0), t \leq 0\}$

*Gjysmë-trajektorja pozitive dhe negative përkatësisht*.

Përkufizim. Pika p $\in E$ quhet:

- $\omega -$ pikë limite e trajektores $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ n.q.s. gjendet një varg $t_n \to \infty$ i tillë që $\varphi(t_n, \boldsymbol{x}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$. Bashkësia e tërë $\omega -$pikë limite shënohet me $\omega(\Gamma)$ dhe quhet $\omega -$bashkësi limite e $\Gamma$.
- $\alpha -$ pikë limite e trajektore $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ n.q.s. gjendet një varg $t_n \to -\infty$ e tillë që $\varphi(t_n, \boldsymbol{x}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$. Bashkësia e tërë $\alpha -$pika limite shënohet më $\alpha(\Gamma)$ dhe quhet $\alpha -$bashkësi limite e $\Gamma$.

$\omega(\Gamma) \cup \alpha(\Gamma)$ është bashkësi limite e $\Gamma$.

Një bashkësi e mbyllur e pandryshueshme A $\subset E$ quhet attractive për sistemin dinamik n.q.s. gjendet një fqinjësi e A e tillë që për çdo x $\in U$, $\varphi(t, \boldsymbol{x}) \in U$ për çdo t $\geq 0$ dhe $\varphi(t, \boldsymbol{x}) \xrightarrow[t\to\infty]{} A$. Një atrektor i sistemit dinamik është një bashkësi attraktive që përmban një orbitë të dendur në të. N.q.s. P është pikë e $\omega(\Gamma)$ ose $\alpha(\Gamma)$ atëhere trajektoret që kalojnë nga P quhet orbita limite për $\Gamma$ dhe $\alpha(\Gamma)$,$\omega(\Gamma)$ përmbajnë pika ekuilibri dhe orbita limite.

**Bifurkimet, disa koncepte bazë dhe shembuj.**

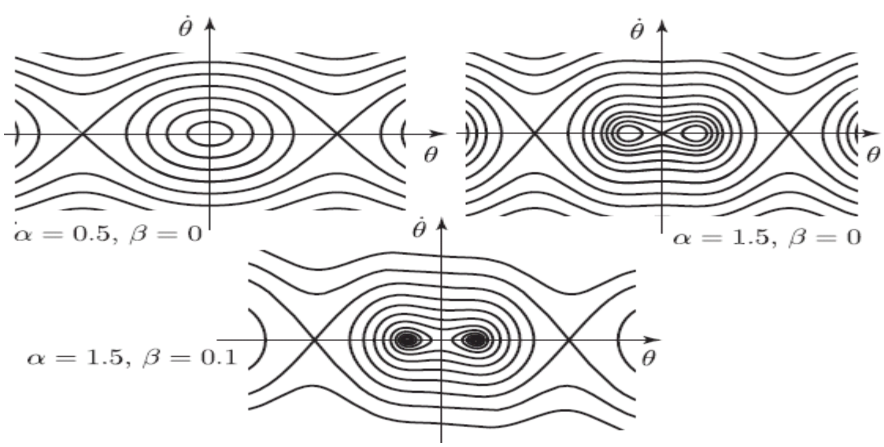
Ndryshimet në sjelljen cilësore të portretit të fazës kur parametri ndryshon quhet bifurkim. Me fjalë të tjera bifurkimi është lindja e një portreti faze që nuk është topologjikisht ekuivalen si rezultat i ndryshimit të vlerave të parametrit. Parametrat që sjellin këto ndryshime quhen parametër i bifurkimit. Këto ndryshime mund të sjellin thjesht në lindjene pikave të reja të ekuilibrit dhe quhen bifurkime statike dhe lindja e orbitave periodike dhe quhet bifurkim dinamik. Kuznetsov Yuri A. (1994)

Kujtojmë që një orbitë quhet periodike n.q.s. $\varphi(t, \boldsymbol{x}_0)$ ka vetinë që $\varphi(t+T, \boldsymbol{x}_0) = \varphi(t, \boldsymbol{x}_0)$ pë ndonjë T dhe çdo t.

Paraprakisht bëjmë një paraqitje të disa tipeve të ndryshme të bifurkimeve që ndeshen në $C^1 -$ sistemet dinamike:

**x'** = f(**x**, $\mu$)

që varen nga disa parametra $\mu \in R^m$. Në veçanti do të përqëndrohemi në ndryshimet që ndodhin në pikat ekuilibër johiperbolike.




**Figurë**. Ndryshimi cilësor që sjell tek sistemi dinamik n.q.s. fusha vektoriale kalon nëpër një vlere bifurkimi $\mu_0$.

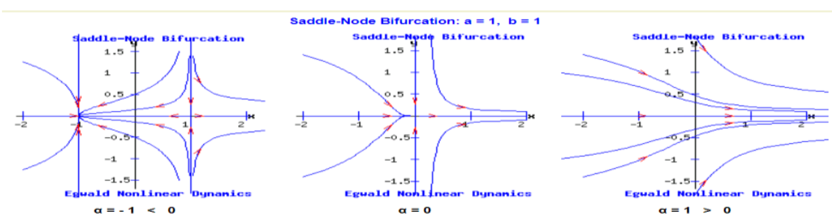
Vlera $\mu_0$ e parametrit $\mu$ në ekuacionin **x'** = f(**x**, $\mu$) për të cilën $C^1-$ fusha vektoriale nuk ka strukturë të qëndrueshme quhet vlerë bifurkimi. Kujtojë që n.q.s. $\breve{\mathbf{x}}$ është një ekulibër hiperbolik për sistemin **x'** = f(**x**, $\mu$) and Df(**x**, $\mu$) $> 0$ është funksion i vazhdueshëm në lidhje me $\mu$ atëhere ndryshime të vigla të parametrit $\mu$ nuk sjellin ndryshime në strukturën lokale afër $\breve{\mathbf{x}}$ d.m.th. për ekuacionin diferencial **x'** = f($\breve{\mathbf{x}}$, $\mu + \varepsilon$).

Shqyrojmë një sistem dinamik me kohë të vazhdueshme që varet nga një parametër:

**x'** = f(**x**, $\mu$), **x** $\in R^n$, $\mu \in R$

Ku f është i lëmuar në lidhje me **x** dhe $\mu$. N.q.s. $\breve{\mathbf{x}}$ është një pikë ekuilibri hiperbolike për $\mu = \mu_0$. Duke ndryshuar vlerat e parametrit pika e ekuilibrit ndryshon duke mbetur hiperbolike. Rrjedhimisht mund të dryshomë vlerat e parametrit duke kontrolluar qëndrueshmërinë e ekuilibrit dhe është e qartë që ka dy mundësi për të cilat prishet cilësia e të qenit pikë hiperbolike. Ose ndonjë vlerë e vetë reale e matricës Jakobian i afrohet zeros dhe kemi $\lambda_1 = 0$ ose çifti vlerave të veta komplekse të konjuguara arrjnë boshtin imagjinar dhe kemi $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$ për ndonjë vlerë të parametrit. Kuznetsov Yuri A. (1994)

Bifurkimi që shoqërohet me lindjen e një vlere të vetë $\lambda_1 = 0$ quhet bifurkim i përthyerjes ( fold bifurcation) që ilustrohet në figurën e mëposhtëme:



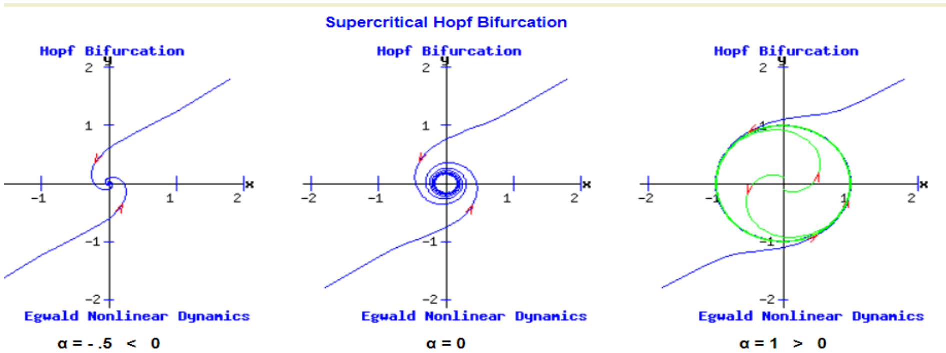

**Figurë**. Bifurkim nyje-samar për vlerat e parametrit a që kalojnë vlerën e bifurkimit a = 0. (Burimi Egwald Nonlinear Dynamics)

Bifurkimi që i korespondon pranisë së $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ quhet bifurkacioni Hopf ( Andronov – Hopf bifurkacion). Ilustrimi i mëposhtëm tregon shembullin e një bifurkacioni Hopf superkritikal

Për sistemin dinamik dypërmasor:

$$\begin{cases} x' = -y + x(a - (x^2 + y^2)) \\ y' = x + y(a - (x^2 + y^2)) \end{cases}$$

Ky sistem ka pikë ekuilibri origjinën e cila për a < 0 është e qëndrueshme për a = 0 humbet qëndrueshmërine duke u bërë ekuilibër johiperbolik i paqëndrueshëm dhe për a > 0 lind një cikël i qëndrueshëm.

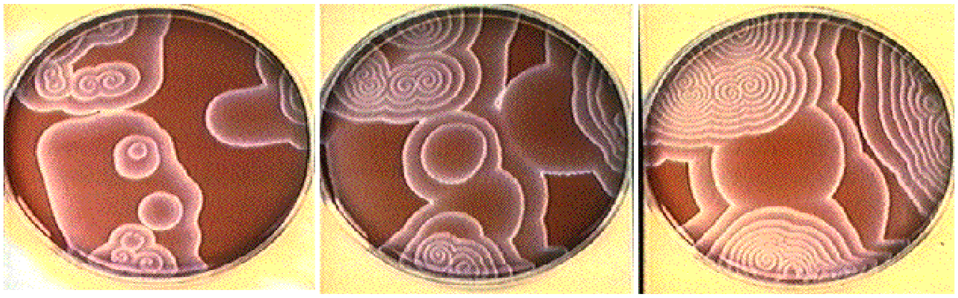



**Figurë**. Portreti i fazës së një bifurkimi Hopf superkritikal ku ekuilibri humbet qëndrueshmërine dhe lind një cikël i qëndrueshëm.

**Dinamikat jolineare kimike.**

Sisteme dinamike kanë tipare cilësore dhe sasiore gjatë zhvillimit të një procesi. Një ndër cilësitë më interesante për sistemet dinamike është kur sistemi ka një orbitë periodike (cikël) kur vlerat e parametrit ndryshojnë, kjo ndeshet në shumë shembuj interesantë të reaksioneve kimike që quhen reaksionet Belousov-Zhabotinsky, në biologji sistemi gjuetar gjah, lëvizja e neuroneve, rrahjet e zemrës dhe shumë dukuri të tjera ku shfaqet një cilësi e tillë e sistemit dinamik që quhet Bifurkimi Hopf d.m.th. lindja e një orbite periodike kur ekuilibri humbet qëndrueshmërinë. Reaksioni Belousov-Zhabotinky (BZ) është më i studjuari si reaksion kimik periodike.Scitt (1991):

Deri në fund të shekullit 20, kimistët besonin që gjithë reaksionet kimike shkoninnë mënyrë monotone drejt ekuilibrit. Ky besim u lëkund në vitin 1950 kur biokimisti Rus Belousov zbuloi një reaksion kimik midis acidit nitrik , joneve të bromit,acidit sulfurik kur përzihen me cerium katalitik, mund të kenë një përsëritje periodike për kohë të gjatë derisa të arrijnë ekuilibrin. Përzierja merr ngjyra të ndryshme e verdhë më pas pa ngjyrë e përsëri për orë të tëra. Ky quhet reaksioni quhet Belousov-Zhabotinsky ( reaksioni BZ shkurt) dhe është një pikë kthese e rëndësishme në historinë e reaksioneve kimike dhe njihen shumë të tillë që janë periodikë dhe për më tepër kthehen në kaotike. Gyorgyi (1993)



Një rast i veçantë i thjeshtë i një reaksioni kimik periodik jepet nga reaksioni midis chlorine dioxideionine dhe malonic acid . Ekuacioni i saktë diferencial që modelon këtë reaksion është i ndërlikuar por ne do të shqyrtojmë një sistem planar që e përafron shumë mirë dinamikën e këtij reaksioni. Ky sistem është:

$$\begin{cases} x' = a - x - \frac{4xy}{1+x^2} \\ y' = bx(1 - \frac{y}{1+x^2}) \end{cases}$$

Ku x dhe y janë përqëndrimet e $I^-$ dhe $ClO_2^-$ ku a, b janë parametra pozitivë. Fillimisht gjejmë pikën e ekuilibrit të sistemit duke zgjidhur sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases} a - x - \frac{4xy}{1+x^2} = 0 \\ bx\left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right) = 0 \end{cases}$$

Duke zgjidhur këtë sistem marrim:

$bx\left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right) = 0$ që sjell x = 0 ose y = $1 + x^2$, duke e zbatuar këtë në ekuacionin e parë të sistemit:

- Për x = 0, a = 0 pika e ekuilibrit është (0,1).
- Për y = $1 + x^2$ pikat e ekulibrit jepen në varësi të parametrit a $(\frac{a}{5}, 1 + \frac{a^2}{25})$.

Duke i përmbledhur këto rezultate del që bashkësia e tërë pikave të ekuilibrit është { $(\frac{a}{5}, 1 + \frac{a^2}{25})$ |a $\in R^+$}.

Llogaritim në vazhdim matricën Jakobian të X = $\binom{x}{y}$:

$$Jf(X) = \begin{pmatrix} -1 - 4y\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2} & \frac{-4x}{1+x^2} \\ b - by\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2} & \frac{-bx}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

Në pikat e ekulibrit matrica Jakobian ka trajtën

$$\mathrm{Jf}((\frac{a}{5}, 1 + \frac{a^2}{25})) = \begin{pmatrix} \frac{3a^2-125}{a^2+25} & \frac{-20a}{a^2+25} \\ \frac{2a^2b}{a^2+25} & \frac{-5ab}{a^2+25} \end{pmatrix}$$

Vlerat e veta të matricës Jakobian jepen nga ekuacioni

$$\lambda^2 - (trJ)\lambda + \det J = 0$$

Pasi e zgjidhim marrim

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(trJ \pm \sqrt{(trJ)^2 - 4\det J})$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = trJ$ dhe $\lambda_1\lambda_2 = \det J$ . Nga vlerat e T dhe D marrim një vlerësim për vlerat e veta të matricës dhe si rezultat edhe për natyrën e pikës së ekuilibrit dhe qëndrueshmërinë e saj.

Për sistemin që po shqyrtojmë kemi që:

$$\mathrm{D} = \det \mathrm{J}(\frac{a}{5}, 1 + \frac{a^2}{25}) = \begin{vmatrix} \frac{3a^2-125}{a^2+25} & \frac{-20a}{a^2+25} \\ \frac{2a^2b}{a^2+25} & \frac{-5ab}{a^2+25} \end{vmatrix} = \frac{25ab}{a^2+25}$$

Dhe gjurma e matricës Jakobian është T = Tr $\mathrm{J}(\frac{a}{5}, 1 + \frac{a^2}{25}) = \frac{3a^2-125-5ab}{a^2+25}$

Atëhere $\lambda_1\lambda_2 = D > 0$ meqë parametrat a dhe b janë positive kjo sjell që $\lambda_{1,2} \neq 0$ kështu nuk do të kemi një bifurkim sadle-node për këtë sistem për vlera e parametrirave a, b > 0.

Do të diskutojmë për rastet:

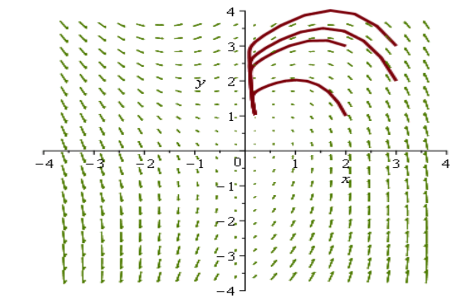
N.q.s. marrim a = 1 pika e ekuilibrit është ( $\frac{1}{5}, \frac{26}{25}$) atëhere D = $\frac{25b}{26}$ dhe T $= \frac{-122-5b}{26}$ , kështu kemi

$$T^2 - 4D = \frac{14884+1220b+25b^2}{26^2} - \frac{100\,b}{26} = \frac{14884+1220b+25b^2-2600b}{26^2} = \frac{25b^2-1380b+14884}{26^2}$$

Dallori i këtij trinomi te gradës së dytë është 190440 -1488400 = -1297960 < 0 që sjell $T^2 - 4D > 0$ dhe të dy vlerat e veta janë reale dhe negative sepse D > 0 duke marrë mosbarazimin $T^2 - 4D < T^2$ ose $\sqrt{T^2 - 4D} < T$ rrjedhimisht

$sgn\left(T \pm \sqrt{T^2-4D}\right) = sgn\, T = sgn\, \lambda_{1,2} = -1$. Kjo tregon që pika e ekuilibrit është një sink real për çdo vlerë të prametrit b.

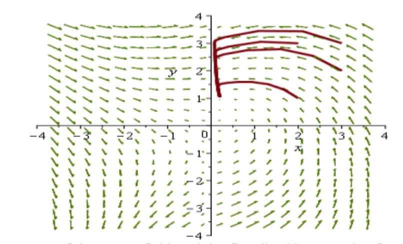
$with(Student[VectorCalculus]) : FlowLine\left( VectorField\left( \left\langle 1 - x - \frac{4 \cdot x \cdot y}{1 + x^2}, 5\, x \cdot \left( 1 - \frac{y}{1 + x^2} \right) \right\rangle \right), [\langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle], view = [-4..4, -4..4], scaling = constrained \right);$




**Figurë**. Trajektoret që konvergjojnë drejt pikës ekuilibër për vlerat e parametrit a = 1

dhe b = 5 dhe vlera fillestare $[\langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle]$: (Maple)

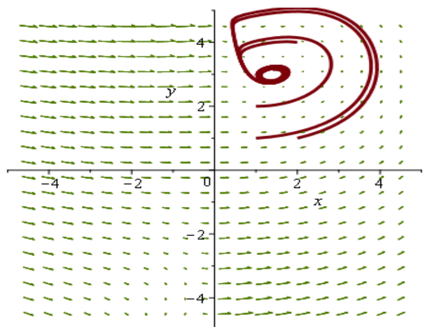
$> with(Student[VectorCalculus]) : FlowLine\left( VectorField\left( \left\langle 1 - x - \frac{4 \cdot x \cdot y}{1 + x^2}, 2\, x \cdot \left( 1 - \frac{y}{1 + x^2} \right) \right\rangle \right), [\langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle], view = [-4..4, -4..4], scaling = constrained \right);$




Vazhdojmë për vlerën e parametrit a = 7 dhe pika e ekuilibrit është $(\frac{7}{5}, \frac{54}{25})$ atëhere D = $\frac{175\, b}{26}$ dhe T = $\frac{22-35\, b}{26}$

Në këtë rast do të marrim T = 0 ose $\frac{22-35\, b}{26} = 0$ për b = $\frac{22}{35}$ kështu kemi dallorin $T^2 - 4D = \frac{484-1540\, b+1225\, b^2}{26^2} - \frac{700\, b}{26} = \frac{1225b^2-19740\, b+484}{26^2}$ i llogaritur për b = $\frac{22}{35}$ do të llogaritim $T^2 - 4D_{b=\frac{22}{35}} = \frac{1225b^2-19740\, b+484}{26^2}|_{b=\frac{22}{35}} = -\frac{12408}{26^2}$ . Kështu vlerat e veta të matricës Jakobian janë $\lambda_{1,2} = 0 \pm \omega i$ where $\omega = \sqrt{\frac{12408}{26^2}}$ atëhere plotësohen kushtet për bifurkimin Hopf – Andronov. Portreti i fazës së sistemit dinamik për vlerat e parametrit a = 7 dhe b = $\frac{22}{35}$ është:

$$> \; with(Student[VectorCalculus]) : FlowLine\left( VectorField\left( \left\langle 7 - x - \frac{4 \cdot x \cdot y}{1 + x^2}, \frac{22}{35} x \cdot \left(1 - \frac{y}{1 + x^2}\right) \right\rangle \right), [\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle], scaling = constrained \right);$$




**Figurë**. Portreti i fazës për vlerat e parametrit a = 7 dhe b = 22/35. ( Marrë me Maple)

## Përfundime

Nga studimi i sistemit dinamik jolinear që modelon reaksionin midis chlorine dioxideionine dhe malonic acid, në varesi të vlerave të parametrave a dhe b përcaktohet ecuria e këtij reaksioni.

1. Në përgjithësi meqë përcaktori i matricës Jakobian në pikat e ekuilibrit është pozitiv dhe nuk bëhet asnjëherë zero atëhere sistemi nuk mund të kete bifurkim saddle node.
2. Në rastin kur vlera e parametrit a = 1 arritëm në përfundimin që për çdo vlerë të parametrit tjetër b sistemi është i qëndrueshëm dhe për çdo vlerë fillestare do të konvergjojë tek pika e ekuilibrit që është $(\frac{1}{5}, \frac{26}{25})$ kjo duket qartë edhe nga rezultati që marrim me Maple. Të gjitha trajektoret konvergjojnë drejt pikës ekuilibër.
3. Për vlerën e parametrit a = 7 dhe b = 22/35 do të kemi që T = 0 dhe meqë D > 0 atëhere ky është kushti që të kemi një bifurkim Hopf-Andronov d.m.th. ekuilibri humbet qëndrueshmërinë dhe kemi lindjen e një orbite periodike të qëndrueshme.

### Literatura

Hirsch Morris W., Smale S., Devaney Robert L. (2004): Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos.

Perko L.( 2001) Differential Equations and Dynamical Systems

Egwald (2017): Nonlinear Dynamics

http://www.egwald.ca/nonlineardynamics/bifurcations.php

Kuznetsov Yuri A. (1994): Elements of Applied bifurcation Theory

Scitt S.K. (1991) Chemical Chaos, 1.st edition Clarendon Oxford

Epsteins Irving R., Showalter K.(1996): Nonlinear Chemical Dynamics: Oscillations, Pattern and Chaos. J.phys. Chem. , 100, 131312-13147

Gyorgyi L.(1993): R,J. Field, Nature 355