DISA VETI TË VARGJEVE EXHAUSTIV NË HAPËSIRAT METRIKE

DORIS MUÇA.[1], AGRON TATO.[2]

[1]Universiteti Wisdom, Fakulteti i Ekonomisë, Departamenti i Ekonomisë

[2]Universiteti Politeknik i Tiranës, Fakulteti i Inxhinierisë Matematike dhe Fizike

e-mail:dorismuca@live.com

Përmbledhje

Në këtë artikull ne paraqesim disa veti në lidhje me konceptin e exhaustivitetit që aplikohet për familjet dhe vargjet e funksioneve. Ky koncept i ri u dha për herë të parë nga Gregoriades & Papanastassiou në 2008 dhe ka një zhvillim të mirë në komunitetin e matematikanëve dhe puna e tyre u ndoq nga shumë autorëve të tjerë. Familja exhaustive përmbahet tek funksionet që janë afër me funksionet baras-te vazhdueshëm, dhe disa konvergjenca tw tyre qëndrojnë midis konvergjencës pikësore dhe konvergjencës uniforme. Ne do fokusohemi në studimin e këtyre familjeve në hapësirat metrike dhe do marrim disa veti me shumë interes.

Fjalëkyçe: Exhaustiviteti, konvergjenca alfa,vargjet exhaustiv, baras -te vazhdueshmëria, δ-limiti, konvergjenca δ-e matshme.

Abstract

In this paper we present some properties in reference to notion of exhaustiveness which applies both for families and sequences of functions. This new notion give for the first time from Gregoriades & Papanastassiou in 2008 and has a good progress and in mathematical community is followed by many authors. The exhaustive family is contained from functions that are near with equicontinuity functions and some of their convergence holds between uniform and point-vice convergence. We are concern in study these families in metric space and we take some properties with interest.

Key words. Exhaustivness, alfa-convergence, exhaustiv sequence, equicontinuity, δ-limit, δ-measurability convergence.

Hyrje

Koncepti i konvergjencës α (konvergjenca e vazhdueshme ose "stetige Konvergenz") është njohur nga fillimi i shekullit të 20-të (Carathéodory, 1929 & Hahn, 1948).

Rreth viteve 1950, (Stoilov,1959) dhe (Arens, 1946) dolën me disa rezultate të cilat karakterizojnë α-konvergjencën dhe janë shumë të dobishme për këtë artikull. Gjithashtu ky lloj i konvergjencës u konsiderua në lidhje me disa lloje të tjera të konvergjencës në (Das,2002, Papanastassiou, 2003).

Në seksionin e parë, ne paraqesim faktet e njohura bazë rreth konvergjencës α si dhe prezantojmë konceptin e exhaustivitetit që pershkon pjesën tjetër të këtij artikulli. Në seksionin e dytë, është futur kuptimi i δ-konvergjencës lokale. Së pari e zbatojmë këtë koncept për familjet dhe vargjet e funksioneve. Ky koncept i ri na mundëson të shohim konvergjencën e një vargu funksionesh në aspektin e vetive të reja te ketyre vargjeve Një shembull i kësaj është teorema 2.4 e cila jep lidhjen e konvergjences pikësore me α-konvergjencës duke përdorur konceptin δ-konvergjencës dhe exhaustivitetit. Seksioni i tretë i kushtohet disa zbatimeve në teorinë e masës

1. Kuptime bazë rreth α konvergjencës dhe exhaustivitetit

Përkufizimet dhe pohimet e mëposhtme për α-konvergjencën (konvergjenca e vazhdueshme) i përkasin referencës (R. Das, N. Papanastassiou, (2002/2003).

Le të fillojmë me disa komente mbi simbolikën. Me X dhe Y ne do të shënojmë hapësirat metrikë, nëse nuk shprehet ndryshe. Nëse nuk përmendet shprehimisht, simboli d qëndron për metrikën në X dhe simboli p për metrikën në Y. Nëse x është një element i X dhe δ është një numër pozitiv, me S(x, δ) nënkuptojmë rruzullin e hapur me rreze δ, dmth S (x, δ) ={y ∈ X / d (y, x) <δ}. Gjithashtu, nëse X dhe Y janë dy hapësira metrike, ne shënojmë me C (X, Y) bashkësinë e të gjitha funksioneve të vazhdueshme nga X në Y.

Përkufizimi 1.1. Le të jetë f, f_n, n ∈ N dy funksione nga X në Y. Vargu $(f_n)_{n\in N}$ është α-konvergjon tek f për çdo x ∈ X ne qofte se për çdo varg $(x_n)_{n\in N}$ të pikave të X konvergjente në x, vargu $(f_n(x_n))_{n\in N}$ konvergjon tek f (x).

Ne do të shkruajmë $f_n \xrightarrow{\alpha} f$ për të treguar se $(f_n)_{n\in N}$ α-konvergjon tek f. Gjithashtu do të mbajmë simbole analoge rreth konvergjencës pikësore dhe uniforme, dmth. ne do t'i shënojmë ato me $f_n \xrightarrow{pw} f$ dhe $f_n \xrightarrow{u} f$ respektivisht.

Vërejtjet 1.2.

(1) Është e qartë se α-konvergjenca është më e fortë se konvergjenca pikësore.

(2) Konvergjencat e zakonshme të tilla si pikësore dhe uniforme nuk kërkojnë një topologji për hapësirën e fillimit. Megjithatë një topologji është e nevojshme për α-konvergjencën.

(3) Marrim f: R → R çdo funksion jo të vazhdueshëm dhe $x_n \to x$ i tillë që vargu $(f_n(x_n))_{n\in N}$ nuk konvergjon tek f (x). Nëse ne vendosim $f_n \equiv f$ për të gjithë n ∈ N, ne shohim se $(f_n)_{n\in N}$ nuk α-konvergjon tek f edhe pse vargu $(f_n)_{n\in N}$ konvergjon uniformisht në f.

(4) Për të gjithë n ∈ N shënojmë f_n: $]0,1] \to \mathbb{R}$ të tillë që $f_n(x) = 1 - nx$, për $x \leq \frac{1}{n}$ dhe $f_n(x) = 0$, për $x > \frac{1}{n}$. Atëherë ne mund të shohim se vargu f_n α konvergjon në funksionin zero, por nuk konvergjon uniformisht. Pohimi

tjetër i takon (Stoilov,1959) përveç pohimit të fundit dhe përshkruan disa rezultate interesante rreth α-konvergjencës.

Pohimi 1.3. Le të jenë (X, d), (Y, p) dy hapësira metrike dhe funksionet f, $f_n, n \in N$, nga X nëY.

(1) Nëse vargu $(f_n)_{n\in N}$ α-konvergjon tek f atëherë f është funksion i vazhdueshëm.

(2) Vargu $(f_n)_{n\in N}$ α-konvergjon tek f nëse dhe vetëm nëse f është i vazhdueshëm dhe $(f_n)_{n\in N}$ konvergjon tek f uniformisht në çdo nënbashkësi kompakte të X.

(3) Nëse $(f_n)_{n\in N}$ konvergjon tek f uniformisht dhe f është i vazhdueshëm, atëherë $(f_n)_{n\in N}$ α-konvergjon tek f .

Dhe gjithashtu:

(4) Nëse X është kompakte dhe $(f_n)_{n\in N}$ α-konvergjon tek f, atëherë $(f_n)_{n\in N}$ konvergjon tek f uniformisht.

(5) Nga(L. Holá, T. Šalát,1998): Një hapësirë metrike X është kompakte nëse dhe vetëm nëse për të gjitha funksionet f, f_n, $n \in N$ nga X në Y, nëse $(f_n)_{n\in N}$ α-konvergjon tek f, atëherë $(f_n)_{n\in N}$ konvergjon tek f uniformisht.

Pohimet e mëposhtme janë shumë të dobishme për më vonë.

Pohimi 1.4. Për të gjitha funksionet $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, nga X në Y, nëse $(f_n)_{n\in N}$ α −konvergjon tek f atëherë çdo nënvarg $\left(f_{n_k}\right)_{n\in N}$ gjithashtu α-konvergjon në f.

Ne tani prezantojmë konceptin exhaustivitetit të futur nga (V.Gregoriadis dhe N.Papaanastassiu 2008), i cili është afër konceptit të baras-vazhdueshmërisë.

Përkufizimi 1.5.

Le të jenë (X, d), (Y, p) dy hapësira metrike, x ∈ X, le të jetë $\mathcal{F}$ një familje e funksioneve nga X në Y dhe $f_n: X \to Y$,n ∈ $\mathbb{N}$.

(1) Nëse $\mathcal{F}$ është e pafundme, ne e quajmë familjen $\mathcal{F}$ exhaustive në x nëse për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston δ> 0 dhe A është një nënbashkësi e fundme e $\mathcal{F}$ e tillë që :për çdo $y \in S(x, \delta)$ dhe për çdo f ∈ $\mathcal{F}$ \ A kemi që $p(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

(2) Në rast se $\mathcal{F}$ është e fundme ne përcaktojmë që $\mathcal{F}$ të jetë exhaustiv në x nëse çdo element i $\mathcal{F}$ është funksion i vazhdueshëm në X.

(3) $\mathcal{F}$ është exhaustiv në X nëse $\mathcal{F}$ është exhaustiv në çdo x ∈X.

(4) Vargu $(f_n)_{n\in N}$ quhet exhaustiv në x nëse për të gjitha $\varepsilon > 0$ ekzistojnë δ> 0 dhe $n_0 \in \mathbb{N}$ të tillë që për të gjithë y ∈ S (x, δ) dhe të gjithë $n \geq n_0$ ne kemi $p(\ f_n(y),\ f_n(x)\ ) < \varepsilon$.

(5) Vargu $(f_n)_{n\in N}$ quhet exhaustiv nëse është exhaustiv në çdo x ∈ X. Vini re se në rastin më interesant ku $(f_n)_{n\in N}$ është një varg funksionesh për të cilat $f_n \neq f_m$ për $n \neq m$, atëherë familja $\mathcal{F} = \{f_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ është exhaustiv në disa $x_0 \in X$ nëse dhe vetëm nëse vargu $(f_n)_{n\in N}$ është exhaustiv në x_0.

Pohimi 1.7. Le të jenë (X, d), (Y, p) dy hapësira metrike, x ∈ X, $\mathcal{F}$ një familje funksionesh nga X në Y dhe $f_n: X \to Y, n \in \mathbb{N}$.

(1) $\mathcal{F}$ është baras-e vazhdueshme në x në qoftë dhe vetëm në qoftë se $\mathcal{F}$ është exhaustiv në x dhe për çdo $f \in \mathcal{F}$, f është i vazhdueshëm në x.

(2) Familja $\{f_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ është baras-vazhdueshme në x nëse dhe vetëm nëse vargu $(f_n)_{n\in N}$ është exhaustiv në x dhe çdo f_n është i vazhdueshëm në x.

Shembull 1.8. Për n ∈ N përcaktoj $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ të tillë që $f_n(x) = \frac{1}{n}$, për $x \leq 0$, $f_n(x) = \frac{1}{2n}$ për x > 0. Natyrisht nuk ka funksion $f_n$të vazhdueshëm në 0. Provohet që vargu $(\mathrm{f_n})_{\mathrm{n\in N}}$ është exhaustiv në 0.

2- Disa veti të tjera të funksioneve exhaustive

Le të studiojmë disa veti të funksioneve exhaustive duke futur konceptin e ri të δ limititi lokal.

Pohim 2.1: Le të jetë $f_n: X \to Y$ një varg exhaustiv, ku X dhe Y janë dy hapësira metrike. Nëse X është një hapësirë kompakte atëherë vargu $(f_n)_{n\in N}$ është i kufizuar në çdo pikë $x \in X$.

Vërtetim. Nga kompaktësia e hapësirës metrike X rrjedh që ajo është plotësisht e kufizuar. Kjo nënkupton që për çdo $\delta > 0$ ne kemi

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(a_k, \delta)$$

Le të jetë x një pikë çfarëdo e X-it. Nga mbulimi i mësipërm i X, ekziston një pikë a_k ,për të cilin x$\in B(a_k, \delta)$. Meqë $(f_n)_{n\in N}$është exhaustiv në çdo pikë a_k, për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $\delta_1 > 0$ dhe $n_0 \in \mathbb{N}$ që për $n \geq n_0$, dhe për çdo $x \in S(a_k, \delta_1)$ ne kemi $p(f(a_k), f(x)) < \varepsilon$. Ky mosbarazim ka vend madje për $\delta \leq \delta_1$. Le të jetë $b \notin S(a_k, \delta)$, b është fikse dhe $b \neq a_k$ për çdo numër natyror k.

$p(f(x), f(a)) \leq p(f(x), f(a_k)) + p(f(a_k), f(b)) < \varepsilon + p(f(a_k), f(b))$

Mosbarazimi tregon që $f(x)$ është pjesë e rruzullit të hapur $B(f(x), r_k)$ ku $r_k = \varepsilon + p(f(a_k), f(b))$. Nëse e përsërisim këtë veprim për çdo $a_k \in X$ ne marrim $f(x) \in B(f(b), r_0)$ ku:

$$r_0 = max\{r_1, r_2, \dots, r_m\}.\blacksquare$$

Pohimi 2.2: Le të jetë Φ një familje funksionesh $f: (X, d) \to (U, p)$ exhaustivë ku X dhe U janë hapësira metrike dhe $g: (U, p) \to (Y, q)$ është një funksion i vazhdueshëm në U. Atëherë bashkësia e funksioneve të përbërë $g(f(x))$ është përsëri një varg exhaustiv.

Vërtetim. Le të jetë $g: U \to Y$ një funksion i vazhdueshëm në $u_0 = f(x_0)$ ku $x_0 \in X$ është një pikë, ku bashkësia Φ është exhaustive.

Kështu për çdo $\delta > 0$ ekziston $n_0 \in N$ dhe $\gamma > 0$ të tillë për çdo $y \in S(x_0, \gamma)$ ne kemi $p(f(x_0), f(y)) < \delta$.

Meqë g është një funksion i vazhdueshëm në u_0 :për çdo $\varepsilon > 0$; ekziston

$\delta_1(\varepsilon) > 0$ e tillë që për:

$$p(u, f(x_0)) = p(f(y), f(x_0)) < \delta_1$$

të kemi: $q(g(u), g(u_0)) = q(f(x)), f(x_0))) < \varepsilon$,

për $0 < \delta < \delta_1$ rrjedh që për çdo $\varepsilon > 0$, dhe për çdo $y \in S(x_0, \delta)$, marrim $p(f(y), f(x_0)) = p(u, u_0) < \delta$

Kështu ne kemi rezultatin që $q(f(y)), f(x_0))) < \varepsilon$

Që na tregon ne se vargu $g(f(x))$ është një varg exhaustiv.■

Përkufizim 2.3: Le të jetë $(f_n)_{n\in N}$ një varg që $f_n: X \to Y$. Funksioni $f(x)$ është një δ −limit lokal i vargut të funksioneve $(f_n)_{n\in N}$ nëse për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $n_0 \in \mathbb{N}$ dhe $\delta > 0$ që për çdo $n \geq n_0$,dhe $y \in S(x, \delta)$ te kemi $p(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$. Në këtë thuhet që $(f_n)_{n\in N}$ është $\delta - lokal$ konvergjent (shkurt δ-konvergjent). ose ka δ-limit lokal.

Nëse vargu $(f_n)_{n\in N}$ ka *δ- limit lokal në X* me përjashtim të një bashkësie me masë të Lebegut zero thuhet që vargu është *δ- limit lokal në X* pothuajse kudo.

Verifikohet lehtë se nga konvergjenca pothuajse kudo rrjedh δ-konvergjenca, ndërsa e kundërta nuk ndodh.

Për të provuar këtë le të marrim një shembull të njohur nga teoria e integrimit (Natanson faqe 94,1974).

Vargu i përcaktuar në [0,1]

$$f_{km}(x)=\begin{cases}1 \quad \text{për x} \in \left[\dfrac{k-1}{m},\dfrac{k}{m}\right[\quad k,m=1,2,\ldots \\ 0 \quad \text{për} \quad \text{x të tjerë në } [0,1]\end{cases}$$

duke bërë një rinumërim të këtij vargu $\varphi_1=f_{11}$, $\varphi_2 = f_{21}$, $\varphi_3= f_{12}$, ...

tregohet se vargu φ_n nuk konvergjon në mënyrë pikësorë në këtë segment për shkak se ai konvergjon sipas masës në këtë bashkësi tek numri zero dhe ka një nënvarg që konvergjon pothuajse kudo në zero ndërsa në asnjë pikë tjeter ky varg nuk konvergjon në mënyrë pikësore në zero.

Kjo nuk pengon që ky varg të jëtë δ-konvergjen pothuajse kudo në zero. Vërtet, pr çdo $\varepsilon>0$ dhe për çdo $x \in [0,1]$ gjendet një $\delta>0$ dhe $n_0\in \mathbb{N}$ që për $n>n_0$ dhe $y\in S(x,\delta)$ të kemi që

$$p(f_n(y), f(y)=0)<\varepsilon.$$

Kjo do të thotë se mosbarazimi i mëësipërm plotësohet për $y \in]x-\delta, x+\delta[$.

për një x të tillë mund të gjenden thyesat $\left]\dfrac{k-1}{m},\dfrac{k}{m}\right[\subset]x-\delta, x+\delta[$

ndoshta për k dhe m që shkojnë në infinit. Për pikat që janë në

$]x-\delta, x+\delta[\setminus \left]\dfrac{k-1}{m},\dfrac{k}{m}\right[$ vlerat e vargut $\varphi_n(x)=1$ me përjashtim të pikave

në $\left]\dfrac{k-1}{m},\dfrac{k}{m}\right[$ ku $\varphi_n(x)=0$ por masa e kësaj bashkesie është $\dfrac{1}{m}$ që shkon në zero kur $m \to\infty$.

Nga përkufizimi duket qartë që konvergjenca uniforme është një δ-lokal konvergjencë.

Shembulli i marrë tek vërejtje 1.2.(R. Das, N. Papanastassiou, (2002/2003)) ndonëse është ndërtuar për dallimin ndërmjet α -konvergjencës dhe konvergjencës uniforme vlen edhe për rastin e δ-konvergjencës lokale.

Të tregojmë lidhjen që ka kjo konvergjencë me α-konvergjencën:

Pohim 2.4. Në qoftë se vargu i funksioneve $f_n: X \to Y$ është α- konvergjent në një pikë $x\in X$ atëherë ai është edhe δ-lokal konvergjent në atë pikë.

Vërtetim. Në saje të pohimit 1.3 (V. Gregoriades, N. Papanastassiou, 2008) vargu α- konvergjent konvergjon tek një funksion i vazhdueshëm në një pikë, pra f është funksion i vazhdueshëm. kjo do të thotë se për çdo $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ gjendet $\delta_1>0$ që për $x_n\in S(x, \delta_1)$ ka vend mosbarazimi $p(f(x_n),f(x))<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Nga kushti i α-konvergjencës marrim që për çdo $\frac{\varepsilon}{2}$>0 gjendet δ_2>0 që për $x_n \in S(x,\delta_2)$ rrjedh se $p(f_n(x_n),f(x))< \frac{\varepsilon}{2}$. Për këtë ε>0 dhe $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ shohim se për $x_n \in S(x,\delta)$ ka vend

$p(f_n(x_n),f(x_n)) \le p(f_n(x_n),f(x))+p(f(x),f(x_n)< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$ ■

mosbarazime që tregojnë se vargu (f_n) konvergjon δ-lokalisht tek f(x).

Pohim 2.5. Le të jetë vargu $f_n: X \to Y$ exhaustiv dhe δ-konvergjent tek funksioni f(x). Atëherë funksioni f është i vazhdueshëm në X.

Vërtetim. Në saje të δ-konvergjencës për çdo $\frac{\varepsilon}{3}$>0 dhe çdo $x \in X$ gjendet $n_0 \in N$ dhe δ_1>0 që për $n>n_0$ dhe $y \in S(x,\delta_1)$ kemi që $p(f_n(y),f(y)< \frac{\varepsilon}{3}$ si dhe $p(f_n(x),f(x)< \frac{\varepsilon}{3}$. Meqenëse vargu (f_n) është ëxhaustiv për $\frac{\varepsilon}{3}$>0 dhe për x e mësipërm gjendet δ_2>0 që për $y \in S(x, \delta_2)$ kemi $p(f_n(x),f_n(y))< \frac{\varepsilon}{3}$.

për $n>n_0$ dhe $y \in S(x, \delta)$ ku $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ shohim se

$p(f(x),f(y)) \le p(f(x),f_n(x))+p(f_n(x),f_n(y))+p(f_n(y),f(y))< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. ■

3. δ -limiti lokal dhe matshmëria

Pohimi 3.1: Le të jenë X dhe Y dy hapësira metrike dhe $f_n: X \to Y$ një varg exhaustiv për çdo $x \in X$. Nëse X është një hapësirë kompakte atëherë çdo element i këtij vargu është një δ −limit i bashkësisë së funksioneve te thjeshte të përcaktuar në X.

Vërtetim. Meqë X është një hapësirë kompakte, ajo është plotësisht e kufizuar

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(a_k, \delta_i)$$

për çdo $\delta_i > 0$. Për këtë δ_i dhe $n \in N$ ne ndërtojmë funksionin e thjeshtë.

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(a_k)\, \chi_{B(a_k,\delta_i)}(x)$$

Meqë $(f_n)_{n\in N}$ është një varg exhaustiv tek çdo pikë $x \in X$, ai do të jetë exhaustiv edhe tek pika a_k. Kështu për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $\delta_s > 0$ dhe $n_0 \in N$ e tillë që për çdo $n \geq n_0$, për $x \in S(a_k, \delta_s)$, kemi:

$p(f_k(a_k), f_k(x)) < \varepsilon$ ose $p\big(g_i(x), f_k(x)\big) < \varepsilon$, mosbarazimi ka vend për $0 < \delta_s \leq \delta_i$, . Duke marr një varg jorritës $\delta_n \to 0$ atëherë X do të mbulohet nga $\bigcup_{j=1}^{r} B(a_{k_n}, \delta_n)$ vargu i funksioneve të thjeshtë (g_{i_n}) që ndërtohet në këtë rast do të konvergjojë tek f_{k_n} i vargut (f_n)..

Rikujtojmë konceptin e mirënjohur të funksioneve të thjeshtë.

Përkufizim 3.2: Një funksion f : S →Y, ku X është një hapësirë metrike (ose vektoriale të normuar) është një funksion i thjeshtë në lidhje me μ nëse ekziston një numër i fundmë bashkësish të matëshme $\{E_i\}$, të tilla që $E_i \in$ S, i=1,...,n

$E_i \cap E_j = \varnothing$ për i≠j, S = $\bigcup_{i=1}^{m} E_i$ dhe $f(s) = y_i$ për s $\in E_i$. Funksioni i thjeshtë paraqitet në formën f = $\sum_{i=1}^{m} y_i \chi_{E_i}(x)$

Në këtë rast për vargun $g_{i_n}(x)$ do të thuhet që δ –konvergjon tek funksioni i vet respektiv pothuajse kudo (p.k.).

Le të jetë X një hapësirë e matshme e pajisur me σ-algjebën Σ dhe masë probabilitare μ.

Përkufizimi 3.4: Le të jetë X është një hapësirë e e matshme. Funksioni $f : X \to Y$, quhet funksion δ-matshëm nëse ekziston vargu i funksioneve të thjeshtë $g_n(x)$

që δ-konvergjon pothuajse kudo tek funksioni f(x). Shkruajmë:

$$\delta - \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) \text{ pothuajse kudo}$$

Rrjedhim 3.5: Elementet e vargut exhaustiv janë funksione δ-matshëm.

Le të jetë (S, Σ, p) një hapësirë e matëshme probabilitare dhe

$g_i(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$ bashkësia e funksioneve elementarë $S = [a, b]$.

Siç e dimë funksionet e thjeshtë janë funksione të matëshme, nëse E_k janë bashkësi të Lebegut (bashkësi të matshme)..

Lema 3.6: Vargu exhaustiv f_n: X→Y δ −konvergjent në një bashkësi kompakte A ⊂X, δ-konvergjon pothuajse kudo në të, me fjalë të tjera bashkësia Z⊂A ku nuk garantohet δ −konvergjenca e ka masën zero:

$\mu(Z) = 0$.

Vërtetim. Bashkësia kompakte A është plotësisht e kufizuar. Kjo tregon që për çdo $\delta_n = \frac{1}{n}$ ekziston një numër i fundëm pikash në A të tilla që

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B\left(a_k, \frac{1}{n}\right).$$

Ne supozojmë që në bashkësinë $C = \bigcup_{k=1}^{m} B\left(a_k, \frac{1}{n}\right) \setminus A$ ekziston një rruzull i hapur me rreze pozitive $B(x,r), r > 0$. Supozojmë që ky rruzull është në një rast ekstrem kur është pjesë e rruzullit të hapur $B\left(a_{k_0}, \frac{1}{n}\right)$, ku a_{k_0}është një pikë kufiri e bashkësisë A. Kjo na sjell që $B(x,r) \subset B\left(a_{k_0}, \frac{1}{n}\right)$, si dhe $r < \frac{1}{2n}$ ku diametri i këtij rruzulli është më i vogël se $\frac{1}{n}$. Kjo nënkupton që $\mu(B(x,r)) < \pi \cdot \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ ■

Pohimi 3.7: Në qoftë se f(x), është funksion δ-i matshëm i tillë që $f: S \to Y$, ku S=[a,b] janë të vërteta pohimet e mëposhtme :

a) Funksioni f është me vlera pothuajse separabile në lidhje me μ.

b) Për çdo bashkësi të hapur G në Y,$f^{-1}(G) \in \Sigma$.

Vërtetim.a) Në lidhje me pohimet e mëparshme ekziston bashkësia e funksioneve të thjeshtë g_n dhe bashkësia e matshme $Z \in \Sigma$, që $\mu(z) = 0$, e tillë që ajo ka δ −limit funksionin f

$\delta - \lim\limits_{n \to \infty} g_n(s) = f(s)$ $s \in S \setminus Z$. Është e qartë që $f(S \setminus Z) \subset \overline{\bigcup_{n \in N} g_n(s \setminus z)}$.

Bashkësia $\overline{\bigcup_{n \in N} g_n(s \setminus z)}$ është separabël si një mbyllje e bashkësisë së numërueshme dhe çdo nënbashkësi e pafundme e bashkësisë së numërueshme është e numërueshme gjë që provon a).

b) Le të jetë G një bashkësi e hapur në Y. Përcaktoj G_n bashkësinë $f(s) \in G$ që $B\left(\mathrm{f}(s), \frac{1}{n}\right) \in G$. Le të supozojmë që $s \notin Z$. Është evidente që për $k \geq n_0$, ekzistojnë $g_k \in B\left(f, \frac{1}{n}\right)$ ku $g_k$është një varg respektiv δ-konvergjent i f-së. Ne mund të marrim $p(g_k, f) < \frac{1}{2n}$ për $n \geq n_0, n_0 \in N$ dhe një δ të vogël kemi $B\left(g_k, \frac{1}{2n}\right) \subset B\left(f, \frac{1}{n}\right) \subset G$. Kjo nënkupton që, $g_k \in G_n$. Anasjelltas, nëse $g_n \in G_n$ kështu për çdo $n \geq n_0, B\left(g_k, \frac{1}{n}\right) \subset G$, në mënyrë të njëjtë ne shohim që ekziston $\delta > 0$, e tillë që $f \in G_n$.

Kështu kur $n \geq m$, për një δ të përshtatshme ne kemi $g_k \in G_n$. Rrjedh që

$$f^{-1}(G \backslash Z) = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} g_k{}^{-1}(G_n) \backslash Z$$

Nga matshmëria e funksioneve të thjeshtë g_n, ne kemi që $g_n{}^{-1}(G_n) \in \Sigma$ për $k \in \Lambda$, rrjedh që $f^{-1}(G \backslash Z) \in \Sigma$ ose atë që ne duam $f^{-1}(G) \in \Sigma$.

Literatura

V. Gregoriades, N. Papanastassiou, (2008): The notion of exhaustiveness and Ascoli-type theorems; Topology and its applications 1111-1114

P. Natanson,(botimi.tretë), (1974):Teorija Funkcij veshçestvennoj peremennoj. Nauka Moskva

R. Das, N. Papanastassiou, (2002/2003): Some types of convergence of sequences of real valued functions, Real Anal. Exchange 28 (2) 1–16

C. Carathéodory, (1929): Stetige konvergenz und normale Familien von Funktionen, Math. Ann. 101 515–533

H. Hahn, (1948): Reelle Funktionen, Chelsea, New York, 222

S. Stoilov, (1959): Continuous convergence, Rev. Math. Pures Appl. 4 341–344

L. Holá, T. Šalát, (1998): Graph convergence, uniform, quasi-uniform and continuous convergence and some characterizations of compactness, Acta Math. Univ. Comenian. 54–55; 121–132