KRAHASIM I STRATEGJIVE NUMERIKE PËR PROBLEMIN E VLERËS FILLESTARE TË EKUACIONEVE DIFERENCIALE TË ZAKONSHME DHE ME VONESA

***ELFRIDA DISHMEMA.[1], ELISABETA PETI (KOÇI).[2], SILVANA MUSTAFAJ.[3]**

[1]Universiteti Bujqësor i Tiranës, Fakulteti i Ekonomisë dhe Agrobiznesit

Departamenti i Matematikës dhe Informatikës

[2]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

[3]Universiteti Bujqësor i Tiranës, Fakulteti i Ekonomisë dhe Agrobiznesit

Departamenti i Matematikës dhe Informatikës

e-mail: elfridadishmema@yahoo.com

Përmbledhje

Një nga fushat më bashkëkohore që ka tërhequr vëmendje ndër vite është fusha e ekuacioneve diferenciale me prapa-efekt, fusha e ekuacioneve diferenciale me vonesa (EDV). Ekuacionet diferenciale me vonesa hasen në shumë fusha aplikimi si në inxhinieri, ekonomi, kimi, ekologji, neuroshkencë, mjekësi e në shumë shkenca të tjera. Në vitet e fundit është treguar një interes i veçantë sidomos në përdorimin e këtyre ekuacioneve në modelimin matematik. Në këtë punim paraqesim disa krahasime të teknikave numerike për zgjidhjen e problemit Koshi ose të problemit të vlerës fillestare (PVF) për ekuacionet diferenciale të zakonshme dhe me vonesa. Ne paraqesim një hyrje në literaturën ekzistuese mbi saktësinë dhe qëndrueshmërinë e metodave numerike për problemin e vlerës fillestare të këtyre ekuacioneve. Gjithashtu japim një pasqyrë të analizës së gabimeve të teknikave më të zakonshme të përdorura bazuar në përafrimin standart. Ky përafrim është ndërtuar me ndihmën e interpolimit të pajisur me një metodë të veçantë numerike për ekuacionet diferenciale të zakonshme. Në rastin e ekuacioneve me vonesa, një përafrim i tillë standart gjithashtu ndërtohet pothuajse me të njëjtat teknika, por me disa dallime që duhet të merren në konsideratë. Metodat me një hap, sidomos formulat Runge-Kutta të përdorura gjerësisht janë të përshtatshme për ndërtimin e këtij përafrimi në të dy rastet. Analiza të tilla krahasuese nxjerrin në pah strategjitë më të mira numerike që mund të përdoren për të zgjidhur problemin e vlerës fillestare në ekuacione diferenciale.

Fjalëkyçe: Ekuacione diferenciale të zakonshme, ekuacione diferenciale me vonesa, strategji numerike, problem i vlerës fillestare, përafrim.

Abstract

One of the more recent areas to attract scrutiny over the years is the area of differential equations with after-effect, the area of Delay Differential Equations (DDEs). Delay differential equations appear in many application areas such as in engineering, economics, chemistry, ecology, neuroscience, medicine and in many other sciences. In recent years has been a particular interest especially in the use of these equations in mathematical modeling. In this paper we present some comparisons of the development of numerical techniques for solving Cauchy problem or initial value problem (IVP) for ordinary and delay differential equations. We provide an introduction to the existing literature on accuracy and stability of numerical methods for initial value problem of these equations. We also give an overview of the error analysis of the most usual used techniques based on the standard approach. This approach is constructed with the use of interpolation endowed with a special numerical method for ordinary differential equations. In the delay case, such standard approximation is also constructed with almost the same techniques but also with differences that need to be taken into consideration. One-step methods, especially widely used Runge-Kutta formulas are suitable for the construction of this approach in the two cases. Such comparative analysis highlight the best numerical strategies that can be used to solve initial value problem in differential equations.

Key words: Ordinary differential equations, delay differential equations, numerical strategy, initial value problem, approximation.

1. Hyrje

Zhvillimi dhe analiza e modeleve matematike të proceseve fizike kanë një rol shumë të rëndësishëm në kuptimin më mirë të natyrës dhe të botës rreth nesh. Studimi ndër vite i këtyre proceseve ka ndihmuar në zhvillimin dhe konsolidimin si disiplinë më vete të teorisë së ekuacioneve diferenciale me vonesa (EDV). Ekuacionet diferenciale me vonesa përshkruajnë modele matematikore për sisteme në të cilat shkalla e ndryshimit varet jo vetëm nga periudha momentale e studimit, por edhe nga historia e tyre në të shkuarën. Sidomos në vitet e fundit, vërehet një gamë shumë e gjerë aplikimesh e ekuacioneve diferenciale me vonesa në mjekësi, në dinamikën e popullatave, në ekonomi, në biologji, në ekologji, në probleme të elektrodinamikës e në shumë fusha të tjera. (Dishmema & Peti, 2015) Teknikat për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshme (EDZ) dhe për zgjidhjen e EDV-ve bazohen në përafrimet numerike të zgjidhjes. Në ditët e sotme njihen një numër i madh metodash që ndërtojnë përafrime numerike të problemit të vlerës fillestare në EDZ dhe në EDV. Pjesa më e madhe e metodave për zgjidhjen e EDV-ve janë ndërtuar duke përshtatur metodat numerike ekzistuese për zgjidhjen e EDZ-ve.Trajta e përgjithshme e një EDV-je të rendit të parë me k vonesa jepet nga ekuacioni

$$y' = f(t, y(t), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_k)), t \geq t_0 \quad (1.1)$$
$$y(t) = \varphi(t), t \leq t_0$$

ku $\varphi(t)$ është funksioni fillestar dhe $\{\tau_i\}_{i=1}^{k}$ janë vonesat, të cilat janë jonegative dhe mund të jenë konstante, që varen nga koha ose që varen nga gjendja. Termi $\{y(t-\tau_i)\}_{i=1}^{k}$ quhet term vonesë. Në ekuacionin (1.1), për arsye të pranisë së termit vonesë $\{y(t-\tau_i)\}_{i=1}^{k}$, metodat numerike që ofrojnë vetëm zgjidhje diskrete nuk janë të përshtatshme për EDV-të, duhet të aplikohen teknikat e interpolimit për të përafruar termin vonesë, me qëllim përafrimin e zgjidhjes së EDV. (Al-Mutib, 1977; Bellen & Zennaro, 2003) Problemi i vlerës fillestare (PVF) për EDV të rendit të parë me një vonesë paraqitet

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), t > 0 \tag{1.2}$$
$$y(t) = \varphi(t) \ , -\tau \leq t \leq 0$$

ku f, φ janë funksione të përcaktuar si $f: R^n \times R^n \to R^n$, $\varphi: [-\tau, 0] \to R^n$ dhe τ paraqet një konstante reale pozitive. (Driver, 1977; El'sgol'ts & Norkin, 1973) Në këtë punim përshkruajmë një metodë numerike për të zgjidhur EDV. Metoda është ndërtuar duke përshtatur teknikat e fundit të zhvilluara për EDZ dhe duke ndërtuar një përafrim të ri për të kontrolluar vonesat. Teknikat e propozuara në punim bazohen në formulat e vazhduara Runge-Kutta (R-K-V). Ky përafrim i ri bazohet në një skemë iterative interpolimi. (Gladwell, *et.al*, 1987; Shampine, 1985)

2. Materiali dhe metoda

Metodat Runge-Kutta të vazhduara

Metodat Runge-Kutta (C. Runge 1856-1927; M. W. Kutta 1867-1944) përbëjnë kategorinë më të rëndësishme të metodave me një hap për përafrimin e zgjidhjeve të EDZ-ve. Shqyrtojmë PVF për EDZ

$$y' = f\big(t, y(t)\big) \tag{2.1}$$
$$y(t_0) = y_0$$

në $[t_0, \ T]$, ku $y(t) \in R^n$ dhe $f: R \times R^n \to R^n$. Zgjidhja numerike e ekuacionit (2.1) është gjenerimi rekurent i vargut numerik $y_0, y_1, \dots, y_N$ si përafrim i vargut të panjohur $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_n), \dots, y(t_N = T)$, ku

$t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ është një rrjet pikash nyje në $[t_0, \ T]$. Në hapin $n+1$ le të jetë $z_{n+1}(t)$ zgjidhja e PVF

$$z'_{n+1} = f\big(t, z_{n+1}(t)\big), \ z_{n+1}(t_n) = y_n \text{në } [t_n, t_{n+1}]$$

Një metodë diskrete R-K klasike e rendit p, me m −hapa, përcakton

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{m} w_i k_i \tag{2.2}$$

ku $h_n = t_{n+1} - t_n$ dhe hapi i i-të përcaktohet nga

$$k_i = f\left(t_n + a_i h_n, y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right)$$

Formula R-K është *eksplicite* në qoftë se $b_{ij} = 0$ për $j \geq i$. (Hanelli & Osmani, 2013) Një *formulë e vazhdueshme R-K* ndërtohet duke përcaktuar

$(\bar{m} - m)$ hapa shtesë për të përftuar rendin e saktësisë p të përafrimit për çdo $t \in (t_n, t_{n+1})$

$$u_{n+1}(t) = y_n + h_n \sum_{i=1}^{m} w_i(\theta) k_i \qquad (2.3)$$

ku $w_i(\theta)$ është polinom i rendit të paktën p dhe $\theta = \frac{t-t_n}{h_n}$. (Dormand & Prince, 1980; Oberle & Pesch, 1981; Oppelstrup, 1978; Shampine, 1986)

Kemi

$$u_{n+1}(t) = y_n + h_n \sum_{i=1}^{\bar{m}} w_i(\theta) k_i = z_{n+1}(t) + O(h_n^{p+1}) \qquad (2.4)$$

- $\{u_{n+1}(t)\}_{n=0}^{N-1}$ përcakton një vektor polinomesh $U(t)$ për$t \in [t_0, t_F]$. Kjo është *zgjidhja e përafërt* e gjeneruar nga metoda R-K-V.
- $U(t) \in C^0[t_0, t_F]$ do të përafrojë vlerat diskrete R-Ky_{n+1}, nëse $w_i(1) = w_i$ për $i = 1, 2, \dots, m$ dhe

$w_{m+1}(1) = w_{m+2}(1) = \cdots = w_{\bar{m}}(1) = 0$

Duke kërkuar që $k_1 = f(t_n, y_n), k_{m+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}), U'(t)$ interpolon $f(t_n, y_n), f(t_{n+1}, y_{n+1})$ dhe çdo komponent të $U(t) \in C^1[t_0, t_F]$.

Kontrolli i gabimit për R-K-V

Zgjidhja e përafruar ka *defekt ose mbetje*

$$\delta(t) \equiv f(t, U(t)) - U'(t) \equiv f(t, u_{n+1}(t)) - u'_{n+1}(t) \qquad (2.5)$$

për $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Metodat numerike ndërtohen dhe implementohen me qëllim përmirësimin e hapit h_{n+1} për të siguruar që maksimumi i $\|\delta(t)\|$ të jetë i kufizuar nga një shumëfish i vogël i TOL (tolerancës).

Cilësia e një zgjidhjeje të përafruar mund të përcaktohet në termat e max. të $\|\delta(t)\|/TOL$. (Enright, 1989a; Enright, 1989b)

Kontrolli jo i drejtpërdrejtë i defektit përcaktohet nga ekuacioni

$$u_{n+1}(t) = y_n + h_n \sum_{i=1}^{\bar{m}} w_i(\theta) k_i = z_{n+1}(t) + O(h_n^{p+1}) \qquad (2.6)$$

Kontrolli i saktë i defektit përcaktohet nga ekuacioni

$$\tilde{u}_{n+1}(t) = y_n + h_n \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{w}_i(\theta) k_i = z_{n+1}(t) + O(h_n^{p+1}) \qquad (2.7)$$

Formula	p	m	$\bar{m}$	$\tilde{m}$
RKV4	4	4	6	8
RKV5	5	6	9	12
RKV6	6	7	11	15
RKV7	7	9	15	20
RKV8	8	13	21	27

Tabela 1. Kostoja për hap e disa formulave eksplicite R-K-V

Nga Tabela 1, vihet re që: $\bar{m} \approx 1.5m$ dhe $\tilde{m} \approx 2m$.

Metoda që propozojmë kërkon të përcaktohen:

- *koeficientët* $\{a_i, b_{ij}\}$ e një metode eksplicite R-K
- *funksionet* $\{w_i(\theta)\}$ që përcaktojnë një *shtrirje të vazhdueshme*

Teknika që propozojmë përbëhet nga një procedurë hap pas hapi. Në hapin e n −të implementojmë m hapa të një iteracioni që jep një zgjidhje të përafërt të ekuacioneve

$$y_{ni} = \tilde{y}(t_n) + h_n \sum_j w_j(a_i) F\left(t_{nj}, y_{nj}, \tilde{y}\left(\gamma\left(t_{nj}\right)\right)\right) \tag{2.8}$$

ku $t_{nj} = t_n + a_j h_n$.

Kemi $\tilde{y}(t) = \varphi(t)$ nëse $t < t_0$; përndryshe

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t_k) + h_k \sum_l w_l(\theta) y'_{kl} \tag{2.9}$$

ku $\gamma(t) = t_k + \theta h_k$ për $0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq k \leq n$ dhe

$y'_{kl} = F\left(t_{kl}, y_{kl}, \tilde{y}(\gamma(t_{kl}))\right)$.

Konceptet bazë të metodës Runge-Kutta (R-K). Formula R-K

Një *metodë R-K me m-hapa* për të zgjidhur EDZ-të e trajtës (2.1) nga një pikë fillestare t_0 me vlerë fillestare $y(t_0)$ dhe me funksion $f(t, y(t))$ mund të shprehet skematikisht në formën (Butcher, 1987)

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & W^T \end{array} \equiv \begin{array}{c|ccc} a_1 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \\ \hline & w_1 & \cdots & w_m \end{array} \tag{3.1}$$

Metoda R-K e paraqitur nga (3.1) jep një përafrim $\tilde{y}(t)$ të zgjidhjes së saktë $y(t)$ të ekuacionit diferencial, të përcaktuar fillimisht në një rrjetë pikash

$$\Im := \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\} \tag{3.2}$$

me $h_n := t_{n+1} - t_n$dhe $t_N \leq T$.Vlerat $\tilde{y}_{n+1} := \tilde{y}(t_{n+1})$ e këtij përafrimi jepen nga

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \sum_{i=1}^{m} w_i \, Y'_{ni} \tag{3.3}$$

ku $\tilde{y}_0 = y(t_0), t_{ni} = t_n + a_i h_n$ dhe

$$Y'_{ni} = f(t_{ni}, Y_{ni}), Y_{ni} = \tilde{y}_n + h_n \sum_{j<ni} b_{ij} Y'_{nj} \tag{3.4}$$

Vlerat $\{Y_{ni}\}$ dhe $\{Y'_{ni}\}$ janë përafrime të $\{y(t_{ni})\}$ dhe $\{y'(t_{ni})\}$ respektivisht. (Butcher, 1987; Dormand & Prince, 1980)

Përkufizim 2.1. (Hoxha, 2008) Një metodë R-K për EDZ ka *rend lokal* p në qoftë se për vlerën fikse

$$T > t_0, \ |\tilde{y}_n - y(t_n)| = O(H^p) \tag{3.5}$$

$\forall \, t_n \in \Im$ ku $h := max_n\{h_n\} \to 0,$ dhe $f(t, y)$ është i diferencueshëm.

(Një metodë R-K ka *rend global* p nëse plotësohen të gjitha *rendet lokale* të ekuacioneve deri në rendin p).

Përafrimi i vazhdueshëm

Përkufizim 2.2. *Një shtrirje e vazhdueshme*[1] $\tilde{y}(t) \approx y(t),$ që bazohet në vlerat $\{\tilde{y}_n, Y'_{ni}\}$ dhe pikat $\{t_n, t_{ni}\}$ është një funksion i përcaktuar në çdo interval $[t_n, t_n + h_n]$ nga

$$\tilde{y}(t_n + \theta h_n) = \tilde{y}_n + h_n \sum_{i=1}^{m} w_i(\theta) Y'_{ni} \ \text{për} \ 0 \leq \theta \leq 1 \tag{3.6}$$

dhe që plotëson $\tilde{y}_r = \tilde{y}(t_r)$ për $r = 0, 1, ...$etj. Një metodë R-K mund të kombinohet me një shtrirje të vazhdueshme për të përftuar një *formulë R-K të vazhdueshme* e cila mund të shprehet me anë të treshes $\{a, \ B, w(\theta)\}$ dhe mund të paraqitet skematikisht (Hairer, Norsett, Wanner, 1993)

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & w^T(\theta) \end{array} \tag{3.7}$$

Përkufizim 2.3. (Butcher, 1987) Një formulë me shtrirje të vazhduar (3.6) quhet e *rendit* q në qoftë se q është numri më i madh i plotë i tillë që

$$\sum_i w_i(\theta) \, a_i^s = \frac{\theta^{s+1}}{s+1} \ \text{për} \ \ s = 0, \dots, q-1. \tag{3.8}$$

Një shtrirje e tillë e vazhdueshme quhet *shtrirje e vazhdueshme kuadraturë e rendit* q.

[1] (Hairer, Norsett, Wanner, 1993; Owren & Zennaro, 1990)

Teoremë 2.1. Për çdo metodë R-K me koeficientë $\{a_i\}$, ekziston një shtrirje e vazhdueshme e rendit q nëse

1) $q \le m$
2) $w_i = w_i(\theta)|_{\theta = 1}$, $\forall i$.

Teoremë 2.2. Duke patur parasysh rrjetën e pikave $\Im$ në (3.2), treshen e vazhdueshme R-K $\{a,\ B, w(\theta)\}$ dhe vlerat $\{\vartheta(t_{ni})\}$ dhe $\{\vartheta'(t_{ni})\}$, një shtrirje e vazhdueshme e rendit q (3.8) plotëson barazimin

$$\max_{0\le\theta\le1}\left|\vartheta(t_n+\theta h_n)-\left(\vartheta(t_n)+h_n\sum_i w_i(\theta)\vartheta'(t_{ni})\right)\right| = O\left(h_n^p\right) \qquad (3.9)$$

për $p = min(q, r) + 1$, $h_n \to 0$, kur $\vartheta^{r-1} \in Lip[t_n, t_{n+1}]$ (për më tepër,

$\vartheta^r \in C[t_n, t_{n+1}]$).

Shtrirja e vazhdueshme (3.9), nëpërmjet vlerave $\{a_i, w_j(a_i)\}$ dhe matricës W me elementë $w_j(a_i)$, përcakton një metodë R-K të renditur që paraqitet skematikisht

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & w^T(1) \end{array} \qquad (4.1)$$

e cila ka rend të paktën të barabartë me rendin e shtrirjes së vazhdueshme. (Owren & Zennaro, 1990; Zennaro, 1986)

Metoda R-K e përshtatur për EDV

Shqyrtojmë një metodë R-K për EDV të trajtës

$$y'(t) = F\left(t, y(t), y\big(t-\tau(t)\big)\right) (t \ge t_0) \qquad (4.2)$$

me kusht fillestar $y(t) = \varphi(t)$ për $t_{min} \le t \le t_0$, lidhur me një zgjedhje të treshes R-K $\{a,\ B, w(\theta)\}$.

Do të përshtasim metodën R-K të EDZ për EDV. (In't Hout, 1992)

Zgjidhjen e përafërt $\tilde{y}(t)$e kërkojmë në intervalin $[t_0, T]$ duke llogaritur vlerat $\{\tilde{y}_n \equiv \tilde{y}(t_n)\}$ në rrjetën e pikave $\Im$ në (3.2), duke llogaritur vlerat e brendshme $\{Y_{ni}\}$ ose duke llogaritur përafrimet $\{Y'_{ni}\}$ lidhur me pikat $\{t_{ni}\}$.

Duke supozuar se kemi gjetur përafrimet e vazhduara R-K $\tilde{y}(t)$ e $y(t)$ për $t \in [t_0, t_n]$ (Teorema 2.1) ndërtohet zgjidhja deri në $t = t_n$, duke supozuar $\gamma(t_{ni}) \le t_n$. Shtrirja e vazhdueshme ka trajtën

$$\tilde{y}(t_k+\theta h_k) =$$

$$\tilde{y}_k + h_k\sum_i w_i(\theta)Y'_{ki} \text{ për } 0 \le \theta \le 1 \ (k = 0, 1, \dots, n-1) \qquad (4.3)$$

Strategjia numerike që propozojmë në (4.3) redukton kërkimin e zgjidhjes numerike nga një proces R-K për ekuacionin e trajtës (2.1), në të cilin $f(t, y(t)) = F(t, y(t), \tilde{y}(t-\tau(t)))$.

Formula e përshtatur

Formula e përshtatur që motivoi metodën jepet nga $\tilde{y}_n \equiv \tilde{y}(t_n) \approx y(t_n)$ ku $\tilde{y}_0 = y(t_0)$,

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \sum_{i=1}^{m} w_i Y'_{ni} \tag{4.4}$$

$Y'_{ni} = F(t_{ni}, Y_{ni}, \tilde{y}(\gamma_{ni}))$ me

$$Y_{ni} = \tilde{y}_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} Y'_{nj}\ , \quad \gamma_{ni} = t_{ni} - \tau(t_{ni})$$

dhe ku $\tilde{y}(\gamma_{ni}) = \varphi(\gamma_{ni})$ në qoftë se $\gamma_{ni} < t_0$, ndërsa

$$\tilde{y}(\gamma_{ni}) = \tilde{y}(t_j + \theta_{ni} h_j) = \tilde{y}_j + h_j \sum_k w_k(\theta_{ni}) Y'_{jk} \tag{4.5}$$

në rastin kur $\gamma_{ni} = t_j + \theta_{ni} h_j$ për $0 \le \theta_{ni} \le 1$ dhe $j \in \{0, 1, \dots, n\}$

Nëse konsiderojmë vlerat $\{Y'_{ni}\}$, atëherë kemi ekuacionet

$$Y'_{ni} = F\left(t_{ni}, \tilde{y}_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} Y'_{nj}, \tilde{y}(\gamma_{ni})\right) \tag{4.6}$$

me $\tilde{y}(\gamma_{ni})$ të paraqitur në (4.5). Në rastin kur $\gamma_{ni} > t_n$, argumenti në vlerën $\tilde{y}(\gamma_{ni})$ shtrihet në të djathtë të t_n dhe jashtë përcaktimit të $\tilde{y}(\cdot)$, kështu formula R-K (4.6) kthehet në implicite për $\{Y'_{ni}\}$. Për ta mbajtur metodën eksplicite duhet që

$$\gamma_{ni} \le t_n, \forall\, i \tag{4.7}$$

3. Rezultate dhe diskutime

Kur nuk plotësohet kushti (4.7), mund të punohet me dy strategji të cilat janë të dyja iterative dhe që bazohen në ekuacionet (4.6). Një strategji është të përdoren formulat R-K në ekuacionet (4.6) duke përdorur iteracionin e Newton-it. Strategjia e dytë është të përdoret një iteracion (parashikues-korrektues)

$$Y_{ni}^{[0]} = \tilde{y}_n + h_n \sum_j b_{ij} F\left(t_{nj}, Y_{nj}^{[0]}, u_{ni}^{[0]}\ (\tilde{y}\ {}_{nj}^{[0]})\right) Y_{ni}^{[s]}$$

$$= \tilde{y}_n + h_n \sum_j w_j(a_i) F\left(t_{nj}, Y_{nj}^{[s-1]}, u_{ni}^{[s-1]}\ (\tilde{y}_{nj}^{[s-1]})\right), s \geq 1 \quad (3.1)$$

ku $u_{ni}^{[s-1]}(t)$ është përafrimi “i fundit” për termin vonesë (histori) dhe $\left\{\tilde{y}_{nj}^{[s-1]}\right\}$ janë vlerat e fundit të përafruara të argumentit vonesë. Pra, mund të parashikohen vlerat për vonesat duke përdorur shtrirjet e vazhdueshme në hapin e fundit. Këto vlera përdoren për të ndërtuar shtrirje të vazhdueshme në hapin aktual, shtrirje të cilat përafrojnë vonesat.

4. Përfundime

Në këtë punim përshkruajmë një metodë numerike për të zgjidhur ekuacionet diferenciale me vonesa dhe analizojmë zgjidhjen numerike të këtyre ekuacioneve. Metoda ështe ndërtuar duke përshtatur teknikat e fundit të zhvilluara për ekuacionet diferenciale të zakonshme dhe duke ndërtuar një përafrim të ri për të kontrolluar vonesat. Teknikat e propozuara bazohen në formulën e vazhduar Runge-Kutta. Strategjia numerike që propozojmë në punim motivoi ndërtimin e formulës R-K të përshtatur për EDV dhe ndërtimin e një përafrimi të ri të zgjidhjes.

Ndërtimi i përafrimit të zgjidhjes me anën e kësaj formule në ekuacionet diferenciale me vonesa tregon që efekti i përafrimit për termin vonesë është i papërfillshëm. Përdorimi i formulës Runge-Kutta në skemat numerike dhe krahasimi i përdorimit të këtyre strategjive numerike në ekuacione diferenciale të zakonshme dhe në ekuacione diferenciale me vonesa siguron një mënyrë elegante për të vlerësuar gabimin e metodës. Në pjesën më të madhe të rasteve, zgjidhja numerike e ekuacioneve diferenciale me vonesa përftohet nga përshtatja e metodave numerike ekzistuese për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshme. Analiza të ngjashme mund të ndërtohen edhe në metoda të tjera që bazohen në metodat Runge-Kutta për ekuacionet diferenciale me vonesa.

Literatura

Al-Mutib A.N. (1977): Numerical methods for solving delay differential equations Ph.D. Thesis. University of Manchester

Bellen A.; Zennaro M. (2003): Numerical methods for delay differential equations. Oxford University Press: 110-115, 152-165

Butcher J.C. (1987): The numerical analysis of ordinary differential equations. Wiley, Chichester, UK

Dishmema E.; Peti E. (2015): The use of delay differential equations in bioscience applications. MDT Proceedings, University of Tirana, Faculty of Natural Sciences, Tirana, Albania: 89-96

Dormand J.R.; Prince P.J. (1980): A family of embedded Runge-Kutta formulae. J. Comp. Appl. Math. vol. 6: 19 – 26

Driver R. D. (1977): Ordinary and delay differential equations. Springer, Berlin

El'sgol'ts L. E.; Norkin S. B. (1973): Introduction to the Theory and application of differential equations with deviating arguments. Academic Press, New York: 6-15

Enright W. H. (1989a): A new error control for initial value solvers. Applied Maths. and Computation vol. 31: 288-301

Enright W. H. (1989b): Analysis of error strategies for continuous Runge-Kutta methods. SIAM J. Numer. Anal. vol. 26: 588-599

Gladwell I.; Shampine L.F.; Baca L. S.; Brankin R. W. (1987): Practical aspects of interpolation in the use Runge-Kutta codes. SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol.8: 322-341

Hairer E.; Norsett S. P.; Wanner G. (1993): Solving ordinary differential equations I. Springer-Verlag, New York. vol. 2: 188- 203

Hanelli L.; Osmani F. (2013): Analiza numerike me matlab. Pegi

Hoxha F. (2008): Metoda të Analizës Numerike: 179-191

In't Hout K.J. (1992): A new interpolation procedure for adapting Runge-Kutta methods to delay differential equations. IMACS '91 Proceedings (eds. R.Vichnevetsky & J.J.H.Miller) (1991) vol. 1: 309 INCA. Dublin, BIT vol. 32: 634–649

Oberle H.J.; Pesch H.J. (1981): Numerical treatment of delay differential equations by Hermite interpolation. Numer. Math. vol. 37: 235 – 255

Oppelstrup J. (1978): The RKFHB4 method for delay differential equations. In numerical treatment of differential equations. New York, Springer. Lecture Notes in Mathematics vol. 631: 133-146

Owren B.; Zennaro M. (1990): Derivation of efficient continuous explicit Runge-Kutta Methods. Technical Report 240/90. Dept. of Computer Science. University of Toronto

Shampine L. F. (1985): Interpolation for Runge-Kutta methods. SIAM J. Numer. Anal., vol. 22: 1014-1027

Shampine L.F. (1986): Some practical Runge-Kutta formulas. Math. Comp. vol. 46**:** 135 – 150

Zennaro M. (1986): Natural continuous extensions of Runge-Kutta methods. Math. Comp.vol. 46: 119 – 133