NJË ANALIZË MBIJETESE PËR KOHËN E QËNDRIMIT NË GJENDJE JO PUNE TË DISA PAJISJEVE ELEKTRONIKE

***LULE BASHA (HALLAÇI)., ERALDA GJIKA (DHAMO).**

Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës së Aplikuar

e-mail: lule.hallaci@fshn.edu.al

Përmbledhje

Në këtë punim është shfrytëzuar analiza e mbijetesës për të studiuar kohën e pritjes për riparim dhe kohën e qëndrimit në gjendje të dëmtuar (jashtë shërbimit) të disa pajisjeve elektronike. Për këto ndryshore të rastit janë vlerësuar: funksioni i mbijetesës, norma hazard (rastësisë), norma hazard (rastësisë) e grumbulluar dhe funksioni i densitetit me metoda joparametrike. Në modelimin parametrik duhet të tregojmë kujdes që shpërndarja e vlerësuar t'u përshtatet të dhënave reale. Modelet joparametrike janë më të lehta për t'u vlerësuar dhe garantojnë më shumë fleksibilitet pasi vlerësimi nuk bazohet në ndonjë familje të parametrizuar të funksioneve. Përzgjedhja e modeleve në këtë punim u krye bazuar në një analizë paraprake të të dhënave. Të dhënat janë marrë nga një qendër shërbimesh elektronike në Tiranë e cila ofron shërbime për mirëmbajtje të pajisjeve elektronike. Databaza e studiuar përmban 330 pajisje të mbërritura në qendrën e shërbimeve gjatë një periudhe kohore prej një viti. Analiza dhe rezultatet e përftuara vijnë në ndihmë të kompanisë për të parashikuar kohën e shërbimit që nevojitet dhe të hartojë një strategji mirëmbajtjeje me qëllim optimizimin e kostos dhe kënaqësinë e klientit në të njëjtën kohë. Të gjitha përpunimet statistikore janë kryen në mjedisin e softuerit R.

Fjalëkyçe: Analiza e mbijetesës, norma e hazard (rastësisë), vlerësimi i densitetit, pajisjet elektronike.

Abstract

In this paper we develop a survival analysis framework for waiting time for repair and the out of service time of some electronic equipment. For these random variables we have estimate the survival function, hazard rate, cumulative hazard rate and density function with nonparametric methods. In parametric modeling we need to be sure that estimated distribution matches the data. Also is the risk of biased and inconsistent parameter estimation. Nonparametric models are easy to estimate. They provide more flexibility because the estimation is not based on any parameterized family of functions. Models were selected based on a detailed preliminary analysis of data. The data are taken from an electronic service center in Tirana which offers service for electronic devices. This sample contains 330 devices, which have come for service in the center for a period of one year. The results help the company to predict service time and design a maintenance strategy to optimize cost and customer satisfaction at the same time. All statistical processing is performed in the R software environment.

Key words: Survival analysis, hazard rate, density estimation, electronic devices.

1. Hyrje

Analiza e mbijetesës është grupi i metodave statistikore ku ndryshorja me interes është koha e ndodhjes së një ngjarjeje të veçantë. Në një gamë të gjerë të situatave reale vihet re se periudha e vrojtimit të një ngjarje është jo e plotë për disa individë, të dhëna të tilla konsiderohen si të dhëna të censuruara (Reddy & Li, 2015). Shpërndarja probabilitare e kohës së mbijetesës zakonisht karakterizohet nga katër funksione bazë: funksioni i mbijetesës $S(t)$, funksionin hazard (rastësisë) $h(t)$, densiteti probabilitar $f(t)$ dhe funksioni hazard (rastësisë) i grumbulluar $H(t)$ (Kleinbaum & Klein, 2005). Në literaturën e analizës së mbijetesës ekziston një numër i madh metodash statistikore që vijnë në ndihmë për të vlerësuar funksionet e mësipërme, ato klasifikohen në: parametrike, joparametrike, gjysmëparametrike dhe metoda hibride të cilat përdorin aspekte nga metodat joparametrike dhe parametrike së bashku.

Në këtë punim do të studiojmë rrjedhën e kërkesave që mbërrijnë në laboratorin e një kompanie e cila ofron shërbim mirëmbajtje për pajisjet elektronike. Të dhënat e studiuara janë vrojtime të regjistruara nga një qendër e shërbimit elektronik në Tiranë, e cila ofron shërbime mirëmbajtje për pajisje elektronike, të tilla si: kompjutera, laptopë, celularë, tableta etj., për një periudhë një vjeçare. Qendra disponon vetëm një laborator nëpërmjet të cilit ofron shërbimin e mirëmbajtjes për pajisjet elektronike, kështu që është e interesuar për menaxhimin sa më efikas të kohës së shërbimit. Kërkesat për shërbim mbërrijnë në laborator sipas një radhe M/M/1 me disiplinë shërbimi FIFO (First In First Out), pra kërkesa që mbërrin e para shërbehet e para. Nga të dhënat e vrojtuara dallohen dy intervale kohe të regjistruara: koha e pritjes për riparim (e konsideruar si koha e pritjes- waiting time), pra koha nga momenti i mbërritjes së kërkesës deri në momentin që ajo fillon të marrë shërbimin nga laboratori; koha që pajisja qëndron në qendrën e shërbimit, pra koha nga momenti i mbërritjes së kërkesës deri në momentin e largimit të saj nga qendra (e konsideruar si kohë jashtë shërbimi -out of service). Në total janë gjithsej 292 vrojtime për databazën e parë të të dhënave dhe 330 vrojtime për databazën e dytë të të dhënave. Njësia matëse e kohës është ora.

Për kohën e pritjes për riparim dhe kohën jashtë shërbimit kemi vlerësuar funksionin e mbijetesës, funksionin hazard (rastësisë), funksionin hazard (rastësisë) të grumbulluar dhe densitetin probabilitar me metoda joparametrike.

2. Metodologjia

Le të shënojmë me $X_1,.....X_n$ ndryshoren me interes, në rastin e studimit është koha e pritjes dhe koha jashtë shërbimit për çdo pajisje, e cila ka densitet *f* dhe funksion shpërndarjeje *F*, dhe me $C_1,.....C_n$ shënojmë ndryshoren e censuruar me funksion shpërndarjeje *G*. Supozojmë se *X* është e pavarur nga *C*. Në rastin kur periudha e vrojtimit të ngjarjes është jo e plotë, pra kur kemi censurim, ndryshorja nuk mund të vrojtohet plotësisht. Mund të vrojtohet vetëm çifti (T_i, δ_i) ku $T_i = \min(X_i, C_i)$ dhe $\delta_i = I(X_i \le C_i)$ me $I(\cdot)$ është funksioni indikator (Ameri & Fard, 2016)

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & X_i \le C_i \\ 0, & X_i > C_i \end{cases} \tag{1}$$

Ekziston një numër i madh metodash statistikore për të vlerësuar funksionin e mbijetesës $S(t)$, funksionin hazard (rastësisë) $h(t)$, densitetin probabilitar $f(t)$ dhe funksionin hazard (rastësisë) të grumbulluar $H(t)$. Metodat klasike Kaplan-Meier dhe Nelson-Aalen janë funksione me hapa vetëm në vrojtimet e pacensuruara. Prandaj, kur ka një numër të madh të dhënash të censuaruara, këta vlerësues kanë vetëm pak kalime rritëse dhe saktësia e vlerësimit mund të mos jetë e pranueshme. Bashkësitë e të dhënave ku prania e censurimit është shumë e madhe po bëhen më të shpeshta, pasi zhvillimet çojnë në rritjen e jetëgjatësisë dhe nëse koha e testimit nuk zgjerohet (dhe zakonisht nuk mund të zgjerohet), një rritje në kohëzgjatje çon në një censurim në rritje. Në një situatë të tillë është rritur dhe numri i metodave të ndryshme nga vlerësuesit klasikë. Një ndër këto metoda joparametrike janë dhe metodat e sheshimit (presmoothing). Këta vlerësues janë një alternativë e mirë, pasi llogariten duke i dhënë peshë të gjitha të dhënave, duke përfshirë edhe vrojtimet e censuruara. Ideja që qëndron pas kësaj metode është funksioni $p(t) = P(\delta = 1 \mid T = t)$, probabiliteti i kushtëzuar që vrojtimi në kohën *t* nuk është i censuruar dhe merret parasysh një vlerësues i sheshuar i $p(T_i)$ në vend të δ_i.

Kështu, *p* mund të vlerësohet në mënyrë parametrike ose jo parametrike. Për shembull, duke përdorur vlerësuesin kernel jo parametrik, Nadaraya-Watson (NW) (Nadaraya, 1964; Watson, 1964) me gjerësi b_1:

$$\hat{p}_{b_1}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_{b_1}(t - T_i)\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} K_{b_1}(t - T_i)} \tag{2}$$

ku *K* është një funksion kernel. Këta vlerësues varen nga një gjerësi (bandwidth) sheshimi b_1, i nevojshëm për të llogaritur vlerësuesin kernel Nadaraya-Watson të $\hat{p}_{b_1}(t)$. Në rastin e vlerësimit të densitetit dhe funksionit hazard (rastësisë), vlerësuesit e tyre të sheshimit, gjithashtu varen nga një gjerësi (bandwidth) e dytë sheshimi b_2, e cila kontrollon shkallën e sheshimit të kernelit. Një mënyrë për të zgjedhur $b = (b_1, b_2)$ është minimizimi i disa gabimeve, zakonisht gabimi mesatar katror i integruar (MISE):

$$MISE_{\varphi}(b) = E[ISE_{\varphi}(b)] = E\left[\int_{0}^{\infty} (\hat{\varphi}_b^p - \varphi(t))^2 \omega(t)dt\right] \qquad (3)$$

ku ω është një funksion jonegativ i peshave (Gasser & Muller, 1979). Meqë MISE varet nga funksioni i panjohur φ, në praktikë gjerësia (bandwidth) optimale *b* merret duke minimizuar një përafrim të MISE. Ekzistojnë zgjedhës të ndryshëm të gjerësisë (bandwidth) siç janë përzgjedhësit plug-in (J´acome & Cao, 2007), (Cao & L´opez-de-Ullibarri, 2007) dhe bootstrap. Të dyja metodologjitë janë konkurruese në kuptimin që asnjëra prej tyre nuk mund të thuhet se është procedura më e mirë në të gjitha rastet.

Funksioni i mbijetesës

Konsiderojmë se kohëzgjatja është një variabël i rastit i vazhdueshëm *T*, atëherë funksioni i mbijetesës $S(t)$ është probabiliteti që koha e ngjarjes ndodh më vonë se një kohë specifike *t* dhe përcaktohet si:

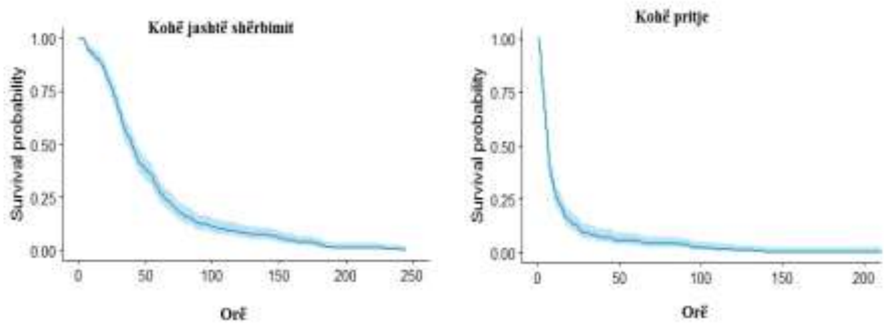
$$S(t) = \Pr(T > t) = \int_{t}^{+\infty} f(u)du = 1 - F(t) \qquad (4)$$

ku $f(u)$ është densiteti probabilitar dhe $F(t)$ është funksioni i shpërndarjes.

Vlerësimi standart joparametrik i funksionit të mbijetesës është ai i propozuar nga Kaplan & Meier (1958), i quajtur edhe vlerësimi Product-Limit. Vlerësimi është i përcaktuar si më poshtë për çdo vlerë të *t* në zonën ku ka të dhëna:

$$\hat{S}(t) = 1 - \hat{F}(t) = \prod_{i:T_i \le t} \left(1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} 1_{\{T_j \ge T_i\}}}\right)^{\delta_i} \qquad (5)$$

Vlerësimi Kaplan-Meier është mënyra më e thjeshtë e llogaritjes së mbijetesës me kalimin e kohës. Ky vlerësim përfshin informacion nga të gjitha vrojtimet, të censuruara dhe të pa censuruara duke konsideruar mbijetesën në çdo moment në kohë si një seri hapash të përcaktuar nga mbijetesa e vrojtuar dhe kohët e censuruara. Në analizën e kohës së mbijetesës, ne vlerësojmë probabilitetet e kushtëzuara të hapave të suksesshëm dhe pastaj i shumëzojmë ato së bashku për të marrë një vlerësim të funksionit të përgjithshëm të mbijetesës. Bazuar në vlerësuesin Kaplan-Meier mund të ndërtojmë kurbat e mbijetesës të vlerësuara, të cilat janë funksione me hapa, siç tregohet në Figurën 1.



(a) (b)

Figura 1. Kurba e mbijetesës me metodën Kaplan-Meier për **a)** kohën jashtë shërbimit (majtas) dhe **b)** kohën e pritjes (djathtas).

Figura 1 tregon kurbën e mbijetesës me metodën Kaplan-Meier për kohën jashtë shërbimit dhe kohën e pritjes. Nga figura 1.a vihet re se 25% e pajisjeve elektronike qëndrojnë jashtë shërbimit të paktën 25 orë, probabiliteti që një pajisje të qëndrojë për më shumë se 39 orë është 0.5 dhe 75% e tyre qëndrojnë jashtë shërbimit të paktën 63 orë. Nga figura 1.b vihet re se probabiliteti që një pajisje të qëndrojë më shumë se 2 orë në pritje për të hyrë në laborator është 0.25, gjysmat e pajisjeve qëndrojnë në pritje për të paktën 5 orë dhe probabiliteti që një pajisje të qëndrojë më shumë se 10 orë në pritje për të hyrë në laborator është 0.75.

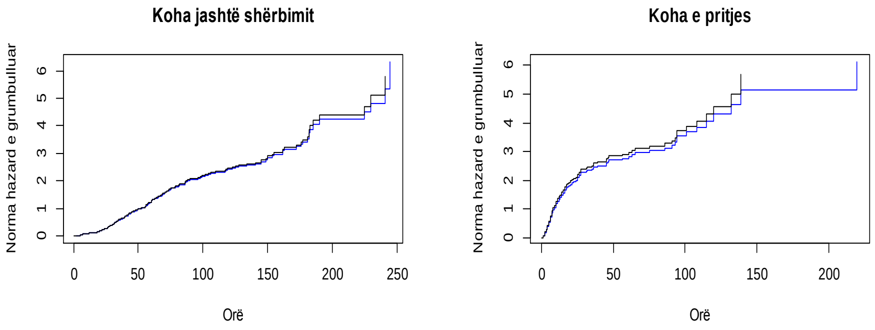
Funksioni hazard (rastësisë) i grumbulluar

Metoda Kaplan-Meier siguron një mënyrë efektive për vlerësimin e funksionit të mbijetesës për të dhënat e censuruara. Gjithashtu kjo metodë mund të përdoret për të vlerësuar funksionin hazard (rastësisë) të grumbulluar $H(t) = -\ln[S(t)]$.

Vlerësuesi në këtë rast është $\hat{H}(t) = -\ln[\hat{S}(t)]$. Një vlerësues alternativ i funksionit hazard (rastësisë) të grumbulluar, e cila ka performancë më të mirë krahasuar me metodën Product-Limit, e cila u propozua nga Nelson (1972) dhe u rizbulua nga Aalen (1978). Vlerësuesi i sheshuar (presmoothed) Nelson-Aalen i funksionit hazard (rastësisë) të grumbulluar jepet nga barazimi (6):

$$\hat{H}_{b_1}^{p}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i:T_i \le t} \frac{p_{b_1}(T_i)}{1 - F(T_i) + 1/n} \qquad (6)$$

Funksioni hazard (rastësisë) i grumbulluar vlerëson sasinë e përgjithshme të rrezikut të grumbulluar, me të cilin individi është përballur nga fillimi i kohës deri në momentin aktual. Funksioni është rritës me kohën (pra asnjëherë zbritës). Grumbullimi pengon vlerësimin direkt të hazard (rastësisë), por duke shqyrtuar formën e kurbës mund të nxirret një përfundim për të.



(a) (b)

Figura 3. Kurba e funksionit hazard (rastësisë) të grumbulluar me metodën Nelson-Aalen me blu dhe me metodën e sheshimit me të zezë për **a)** kohën jashtë shërbimit (majtas) dhe për **b)** kohën e pritjes (djathtas).

Në figurën 3 paraqitet funksioni hazard (rastësisë) i grumbulluar. Për kohën jashtë shërbimit funksioni hazard (rastësisë) i grumbulluar fillimisht rritet ngadalë dhe pastaj përshpejtohet pas 30 orësh. Kjo sugjeron që ka një risk të ulët fillimisht, ndjekur nga një rritje e vazhdueshme figura 3.a. Për kohën e pritjes funksioni hazard (rastësisë) i grumbulluar fillimisht rritet ndjeshëm dhe pastaj ngadalësohet pas 7 orësh. Kjo sugjeron që ka një risk fillimisht të lartë, i cili bie me kalimin e kohës.

Densiteti probabilitar

Si çdo variabël tjetër i vazhdueshëm, koha e mbijetesës T ka densitet probabilitar të përcaktuar si limiti i probabilitetit që një individ e arrin ngjarjen në një interval të shkurtër t në $t+\Delta t$, ose thjesht probabiliteti i arritjes së ngjarjes në një interval të shkurtër për njësi kohe. Funksioni i denistetit probabilitar mund të vlerësohet në forma të ndryshme. Një nga metodat klasike joparametrike është vlerësimi kernel.

Blum & Susarla (1980) zgjeruan vlerësuesin joparametrik tradicional të llojit kernel për të përfshirë të dhëna të censuruara, për vlerësimin e densitetit:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{t-s}{h}\right) d\hat{F}(s) \tag{7}$$

Një vlerësues i sheshuar (presmoothed) i funksionit të densitetit është:

$$\hat{f}^{p}_{b_1,b_2}(t) = \int_0^{\infty} K_{b_2}(t-u)\,d\hat{F}^{p}_{b_1}(u) = \sum_{i=1}^{n} K_{b_2}(t-T_{(i)})W^{p}_{(i),b_1} \tag{8}$$

ku peshat janë përcaktuar si $W^{p}_{(i),b_1} = \hat{F}^{p}_{b_1}(T_{(i)}) - \hat{F}^{p}_{b_1}(T_{(i-1)})$ (J´acome *et al*., 2008).

Ekzistojnë edhe metoda hibride, të cilat përdorin aspekte nga metodat joparametrike dhe parametrike së bashku. Një nga këto metoda është edhe vlerësimi parametrik me bazë joparametrike i densitetit (Talamakrouni *et al*., 2016) i përcaktuar si

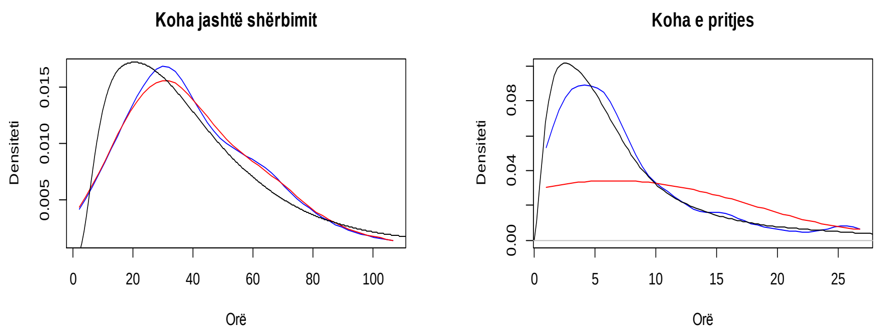
$$\hat{f}_{\hat{\theta}}(t) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{t-s}{h}\right)\frac{f_{\hat{\theta}}(t)}{f_{\hat{\theta}}(s)}d\hat{F}(s) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t-T_i}{h}\right)\frac{f_{\hat{\theta}}(t)}{f_{\hat{\theta}}(T_i)}W_i \qquad (9)$$

Peshat W_i janë kalimet e $\hat{F}$ në X_i (Suzukawa *et al*., 2001).

$$W_i = \frac{\delta_{[i]}}{n-i+1}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{n-j}{n-j+1}\right)^{\delta_{[j]}}, \quad i = 1, 2, \ldots., n \qquad (10)$$

Vlerësimi parametrik me bazë joparametrike ka në të njëjtën kohë përbërës joparametrikë dhe parametrikë. Ideja themelore është të fillohet me ndonjë vlerësues parametrik të densitetit dhe më pas të përshtatet ky përafrim parametrik i fazës së parë duke përdorur një vlerësues joparametrik të tipit kernel.

Në punimin (Gjika *et al*., 2018) është bërë vlerësimi parametrik i densitetit. Për kohën jashtë shërbimit është vlerësuar si më e përshtatshme për të dhënat shpërndarja lognormale me parametra: *meanlog 3.66; sdlog 0.83* dhe shpërndarja gamma me parametera: *shape 1.74; rate 0.032*.



(a) (b)

Figura 4. Vlerësimi i densitetit me përzgjedhjen e gjerësisë (bandwidth) me metodën plug-in (blu), me metodën bootstrap (e kuqe) dhe me metodën parametrike me bazë joparametrike (e zezë) për **a)** kohën jashtë shërbimit (majtas) dhe **b)** kohën e pritjes (djathtas).

Figura 4 paraqet vlerësimin joparametrik të densitetit. Mënyra e parë janë metodat e sheshimit kernel ku përzgjedhja e gjerësisë (bandwidth) është kryer me metodën plug-in (vija blu) dhe metodën bootstrap (vija e kuqe). Mënyra e dytë është vlerësimi parametrik me bazë joparametrike. Bazuar në rezultatet e punimit (Gjika *et al*., 2018) në metodat e sheshimit kemi përdorur kernelin gamma.

Në vlerësimin parametrik me bazë joparametrike është përdorur shpërndarja lognormale si bazë fillestare dhe kerneli gamma për përshtatjen e përafrimit fillestar, figura 4.a. Për kohën e pritjes për të marrë shërbimin nga laboratori është vlerësuar se shpërndarja lognormale me parametera: *meanlog: 1.91 sdlog: 0.062* ju përshtatet më mirë të dhënave. Për këtë arsye në vlerësimi parametrik me bazë joparametrike është përdorur shpërndarja lognormale si bazë fillestare dhe kerneli epanechnikov për përshtatjen e përafrimit fillestar figura 4.b. Mbështetur në vlerësime teorike, vlerësimi parametrik me bazë joparametrike është metodë më e mirë krahasuar me vlerësimin tradicional kernel për vlerësimin e denistetit (Hallaci & Puka, 2017).

Funksioni hazard (rastësisë)

Vlerësuesi Nelson-Aalen $\hat{H}(t)$ siguron një mjet efikas për të vlerësuar funksionin hazard (rastësisë) të grumbulluar *H(t)*. Në shumicën e aplikimeve, parametri me interes nuk është *H(t)*, por derivativi i tij *h(t)*, norma e hazard (rastësisë). Funksioni i rastësisë (hazard) *h(t)* i kohës së mbijetesës *T* jep normën e kushtëzuar të dështimit. Është i përcaktuar si probabiliteti i ndodhjes së ngjarjes gjatë një intervali të shkurtër kohe, duke supozuar se individi nuk e ka përjetuar ngjarjen në fillim të intervalit.

$$h(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\Pr(t \le T < t + dt)}{dt} \qquad (11)$$

Funksioni hazard (rastësisë) mund të përcaktohet në lidhje me densitetin probabilitar dhe funksionin e mbijetesës si:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \qquad (12)$$

Pjerrësia e vlerësuesit Nelson-Aalen jep një vlerësim “krudo” të *h(t)*. Në literatura janë propozuar disa teknika për të vlerësuar *h(t)*. Ne jemi përqëndruar në përdorimin e metodave kernel dhe metodat e sheshimit (presmoothing). Këta vlerësues bazohen në vlerësuesin Nelson-Aalen. Vlerësuesi kernel i *h(t)* bazuar në kernel *K()* jepet nga (Muller & Wang, 1994):

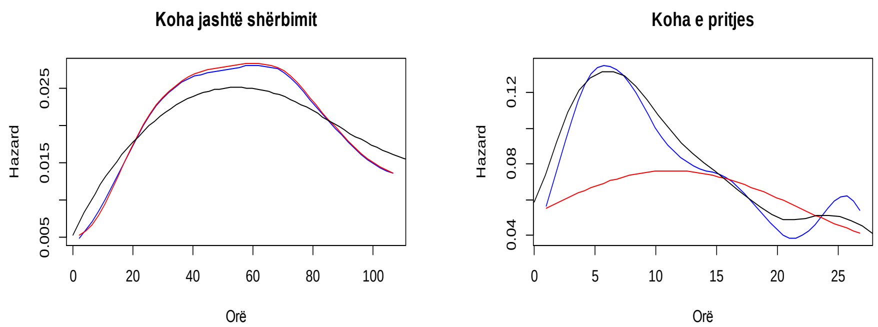
$$\hat{h}(t) = b^{-1} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t - t_i}{b}\right) \Delta \hat{H}(t_i) \qquad (13)$$

ku $\Delta \hat{H}(t_i) = \hat{H}(t_i) - \hat{H}(t_{i-1})$.

Një version sheshimi (presmoothed) i funksionit hazard (rastësisë) jepet nga (Cao & L´opez-de-Ullibarri, 2007):

$$\hat{h}^{p}_{b_1,b_2}(\mathrm{t}) = \int_{0}^{\infty} K_{b_2}(\mathrm{t}-\mathrm{u})\,\mathrm{d}\hat{\mathrm{H}}^{p}_{b_1}(\mathrm{u}) \qquad (14)$$

Në Figurën 5 tregohet vlerësimi i normës së hazard (rastësisë), duke përdorur kernelin Epanechnikov, me kufij të rregulluar. Për kohën jashtë shërbimit kurba e hazard (rastësisë) fillimisht vjen në rritje, për të qëndruar konstante pastaj nga 30 orë deri në 70 orë ku zbret përsëri. Në fillim priten rreth 0.006 shërbime për orë, ndërsa 30 orë më vonë për ato pajisje që nuk kanë marrë ende shërbimin priten rreth 0.025 shërbime në orë, pra norma e hazard (rastësisë) është 4.2 herë më shumë. Për kohën e pritjes për të marrë shërbimin në laborator kurba e hazard (rastësisë) ka një rritje të shpejtë ku arrin kulmin në 7 orë dhe pastaj ka një zbritje të njëtrajtëshme.



(a) (b)

Figura 5. Vlerësimi i hazard (rastësisë) me përzgjedhjen e gjerësisë (bandwidth) me metodën plug-in (blu), me metodën bootstrap (e kuqe) dhe me metodat kernel (e zezë) për **a)** kohën jashtë shërbimit (majtas) dhe **b)** kohën e pritjes (djathtas).

Përfundime

Përfitimet e analizës së mbijetesës si një qasje për të vlerësuar kohën e ngjarjeve kritike janë të qarta në shumë fusha të ndryshme aplikimi. Në këtë punim është përdorur analiza e mbijetesës për të analizuar kohën e pritjes për riparim dhe kohën jashtë shërbimit të disa pajisjeve elektronike. Megjithatë, metoda e përdorur mund të zgjerohet për të modeluar kohën e shërbimit për lloje të ndryshme pajisjesh dhe për të bërë krahasimin e tyre. Modeli më i mirë për vlerësimin e densitetit të kohës jashtë shërbimit është modelin parametrik me bazë joparametrike, me shpërndarja lognormale si bazë fillestare dhe kerneli gamma për përshatjen e përafrimit fillestar. Ky punim i vjen në ndihmë kompanisë për të parashikuar kohën e shërbimit dhe për të hartuar një strategji mirëmbajtjeje për të optimizuar koston dhe kënaqësinë e klientit në të njëjtën kohë.

Literatura

Aalen O. (1978): Nonparametric Inference for a Family of Counting Processes. The Annals of Statistics, 6, 701–726

Ameri S., Fard J. M. (2016): Survival Analysis based Framework for Early Prediction of Student Dropouts. Indianapolis, IN, USA. ISBN 978-1-4503-4073-1

Blum J. R., Susarla V. (1980). Maximal deviation theory of density and failure rate estimates based on censored data. J.Multiv.Anal. 5, 213-222

Cao R., L´opez-de-Ullibarri I. (2007): Product-Type and Presmoothed Hazard Rate Estimators with Censored Data. Test, 16, 355–382

Gasser T., Muller H. (1979): Kernel Estimation of Regression Functions. volume 757 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 23–68. Springer-Verlag

Gjika E., Basha L., Ktona A. (2018): A Probabilistic Model to Predict the Time Out of Service for Electronic Devices. The International Conference 'Recent Trends and Applications in Computer Science and Information Technology'. Tirana, Albania

Hallaçi L., Puka Ll. (2017): Guided kernel density estimator and the gamma kernel estimator. International Conference on Applied Statistics and Econometrics, Tirana, Albania, ISBN 978-9928-135-20-9

J´acome M., Cao R. (2007): Almost Sure Asymptotic Representation for the Presmoothed Distribution and Density Estimators for Censored Data. Statistics, 41, 517–534

J´acome M., Gijbels I., Cao R. (2008): Comparison of Presmoothing Methods in Kernel Density Estimation under Censoring. Computational Statistics, 23, 381–406

Kaplan E., Meier P. (1958): Nonparametric estimation from incomplete observations. Journal of the American Statistical Association, vol. 53, pp. 457–481

Kleinbaum D., Klein M. (2005): Survival Analysis. Statistics for Biology and Health, Springer, New York, NY, USA, 2nd edition

Muller H., Wang J., (1994): Hazard rate estimation under random censoring with varying kernels and bandwidths, Biometrics, Vol. 50, No. 1, 61–76

Nadaraya EA. (1964): On Estimating Regression. Theory of Probability and Its Applications, 10, 186–190

Nelson W. (1972): Theory and Applications of Hazard Plotting for Censored Failure Data. Technometrics, 14, 945–965

Reddy C. K., Li Y. (2015): A review of clinical prediction models. In C. K. Reddy and C. C. Aggarwal, editors, Healthcare Data Analytics. Chapman and Hall/CRC Press

Suzukawa A., Imai H., Sato Y. (2001): Kullback-Leibler information consistent estimation for censored data. Ann. Inst. Statist. Math. 53, 262-276

Talamakrouni M., Van Keilegom I., El Ghouch A. (2016a): Parametrically guided nonparametric density and hazard estimation with censored data. Comput. Statist. Data Anal. 93, 308-323

Watson G.S. (1964): Smooth Regression Analysis. Shankya A, 26, 359–372