

INFORMACIONI ASTROMETRIK NGA DY TELESKOPE

LINDITA HAMOLLI., MIMOZA HAFIZI.

Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Fizikës

e-mail: lindita.hamolli@fshn.edu.al

Përmbledhje

Fenomeni i mikropërthyerjes gravitacionale ndodh kur një objekt (lente) kalon pranë vijës së shikimit të një ylli të largët. Ajo që matet fotometrikisht është kurba dritës, e cila tregon sesi ndryshon me kohën amplifikimi i yllit burim. Nga maksimumi i kurbës së dritës dhe gjerësia e saj gjenden disa lidhje mes parametrave të lentes. Gjithsesi, këto janë të pamjaftueshme për të përcaktuar në mënyrë të vetme masën, distancën dhe shpejtësinë e lentes. Themë që kemi degjenerim të vlerave. Për heqjen e këtij degjenerimi ka disa mënyra. Njëra prej tyre, ajo që do të diskutojmë në këtë punim, është që vrojtimi i ngjarjes të kryhet njëkohësisht nga dy teleskopë, ku secili mat kurbën e vet të dritës. Nga zhvendosja e kurbave të përfuara përcaktohet zhvendosja kohore e maksimumeve dhe diferenca e amplifikimeve maksimale, të cilat ndihmojnë në përcaktimin në mënyrë të vetme të parametrave të lentes. Mirëpo situata varet nga pozicioni që kanë dy teleskopët në lidhje me lentin. Në këtë punim ne kemi treguar se si ky problem mund të zgjidhet përmes përcaktimit të pozicionit të ngjarjes, i cili quhet matje astrometrike. Në rastin e mikropërthyerjes, pozicioni i yllit parë nga vrojtuesi kryen një trajektore eliptike, me boshte të rendit nga disa μs në disa dhjetra. Llogaritjet që teleskopët kanë aftësi për të vrojtuar disa nga këto elipse ose një pjesë të tyre. Në punimin tonë janë konsideruar vrojtimet e teleskopit hapësinor Gaia, i cili që prej 2013 është hedhur në pikën L2 të Lagranzhit dhe po kryen matje astrometrike. Gjithashtu, në perspektivë janë planifikuar dhe teleskopë tokësorë, të cilët do të kryejnë vrojtime të ngjashme.

Fjalëkyçe: Mikropërthyerja gravitacionale; astrometri.

Abstract

The gravitational microlensing phenomenon happens when an object (lens) moves close to the line of sight toward a distant star. What is measured photometrically is the light curve that shows how the source star amplification varies with time. From the maximum of the light curve and its width one can find some relations between the lens parameters. Anyhow, these are insufficient to uniquely determine the mass, distance and velocity of the lens. We say that we have degeneration of values. There are several ways to remove this degeneration. One of them, what we will discuss in this work, is that the observation of the event is performed simultaneously by two telescopes, where each of them measures its own light curve. From the shifting of the obtained curves are found the time displacement of the maxima and the difference of the maxima amplifications, which help in definition of the lens parameters, uniquely. But, the situation depends on the relative position of the two telescopes and the lens. In this work we have shown how this problem can be solved by determining the position of the event, which is called astrometric measurement. In the case of microlensing, the position of the star seen by the observer performs an elliptical trajectory, with axes ranging from several μs to several tens. It is

calculated that telescopes are able to observe some of these ellipses or a part of them. In our work, we considered the Gaia space telescope observations, which is launched in Lagrange L2 point since 2013 and is performing astrometric measurements. In perspective, ground-based telescopes are planned as well, which will perform similar observations.

Key words: Gravitational microlensing; astrometry.

Hyrje

Dihet prej më shumë se dy dekadash që natyra e objekteve qiellore midis vëzhguesit dhe yjeve burime mund të studiohet duke analizuar kurbat e dritës së tyre (Paczynski, 1986). Kur pranë vijës së shikimit drejt një ylli kalon një objekt, ai vepron si një lente duke përkulur rrezet e dritës dhe na jep dy imazhe të tij që janë shumë pranë njëri tjetrit. Prandaj kjo dukuri quhet mikropërthyerja gravitacionale. Ajo që matet fotometrikisht nga vrojtimit gjatë kësaj dukurie është rritja dhe pastaj rënia e ndriçimit të yllit burim. Përveç këtij efekti, gjatë kësaj dukurie nga vrojtimit astrometrike kemi një zhvendosje të qendrës së imazheve (centroidit) nga pozicioni i yllit kur objekti është shumë larg vijës së shikimit. Vrojtme fotometrike janë duke u kryer nga Toka (OGLE, MOA dhe disa projekte të tjera që ndjekin ngjarje në rast alarmi) dhe hapësira (Kepler 2 dhe Spitzer). Në të ardhmen janë planifikuar vrojtme fotometrike nga observatori hapësinor WFIRST (Spergel et al., 2015). Ndërsa vrojtme astrometrike janë duke u kryer vetëm nga Gaia. Gaia është një observator hapësinor i ESA (European Space Agency) që është lëshuar më 19 Dhjetor 2013 në pikën L2 të Langrazhit dhe do të kryejë për pesë vjet vrojtme astrometrike me saktësi shumë të lartë deri në 4 μ s për yjet me magnitudë të dukshme më të vogël se 13 (Hog, 2017). Kohët e fundit po punohet për fillimin e vrojtmeve astrometrike nga Toka (instrumenti GRAVITY tek VLT (Very Large Telescope), saktësia astrometrike e të cilit është 10 μ s) (Eisenhauer *et al.*, 2009).

Vitet e fundit është rritur interesi për zbulimin e objekteve të errët në Galaksinë tonë, të tillë janë edhe planetet e lira, trupa qiellore të pa lidhur në ndonjë yll, me masa nga $10^{-5}M_e$ në $10^{-2}M_e$ (Sumi *et al.*, 2011). E vetmja metodë e studimit të tyre në largësi të mëdha është mikropërthyerja gravitacionale. Vrojtmet astrometrike nga Gaia dhe GRAVITY të ngjarjeve mikropërthyerje të shkaktuara prej tyre do të ndihmonin në njohjen e popullimit të tyre.

Në këtë punim ne fillimisht bëjmë një përmbledhje të vrojtmeve fotometrike dhe astrometrike dhe pastaj diskutojmë se si sinjali astrometrik i marrë nga dy teleskopë ndihmon në heqjen e degjenerimit për përcaktimin e parametrave të lentes. Punimi mbyllet me një përshkrim të konkluzioneve kryesore dhe bibliografinë.

Vrojtimi fotometrik

Ne do të trajtojmë rastin kur lentja gravitacionale është një objekt i thjeshtë, i cili kur afrohet pranë vijës së shikimit drejt një ylli, jep dy imazhe shumë

pranë njëri tjetrit dhe ajo që matet fotometrikisht është kurba e amplifikimit të dritës. Për një burim në hapjen këndore θ_s nga një lente pikësore, pozicionet këndore θ të dy imazheve në lidhje me lentën përftohen nga zgjidhja e ekuacionit të lentes (Schneider et al., 1992) $u^2 - u\theta_s + 1 = 0$, ku $u = \theta_s/\theta_E$, $u\theta_s/\theta_E$ janë distanca pa njësi dhe

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_S - D_L}{D_L D_S}} \approx 2851 \mu\text{as} \sqrt{\frac{M(M_\odot)}{D_L(\text{kpc})} \left(1 - \frac{D_L}{D_S}\right)} \quad (1)$$

është rrezja këndore e Ajnshtajnit, M - masa e lentes, D_S dhe D_L janë distancat e yllit burim dhe lentes nga vërtuesi. Zgjidhjet e ekuacionit janë: $u_{\pm} = (u \pm \sqrt{4 + u^2})/2$, të cilat japin pozicionet e dy imazheve (+ and -) në lidhje me pozicionin e lentes. Gjatë ngjarjes mikropërthyerje, imazhi pozitiv gjithmonë ndodhet jashtë unazës së Ajnshtajnit me rreze $R_E = \theta_E D_L$ dhe imazhi negativ brenda saj (shiko fig. 1). Me rritjen e distancës yll-lente, imazhi pozitiv i afrohet pozicionit të yllit ndërsa imazhi negativ, duke u bërë gjithmonë dhe më i zbehtë, lëviz drejt pozicionit të lentes. Amplifikimet e dy imazheve janë:

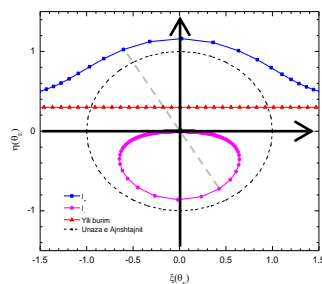


Figura 1. Sistemi i boshteve ζ në planin e lentes. Lentja ndodhet në qendër, rrethi me vijë të ndërprerë është unaza e Ajnshtajnit. Vija ngjyrë blu është trajektorja që përshkruan imazhi pozitiv dhe ajo ngjyrë lejla trajektorja e imazhit negativ. Ylli burim që është duke lëvizur sipas trajektores me ngjyrë të kuqe, është supozuar të jetë në distancën $D_S = 8.5 \text{kpc}$, lentja me $M = 10^{-3} M_\odot$, $D_L = D_S/2$ dhe $u_0 = 0.3$ po lëviz me shpejtësi tranzit $v_T = 100 \text{km/s}$. Të gjitha madhësitë janë dhënë në njësinë e θ_E .

$$A_{+,-} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{2+u^2}{u\sqrt{4+u^2}} \right],$$

dhe amplifikimi total jepet $A = |A_+| + |A_-| = \frac{2+u^2}{u\sqrt{4+u^2}}$ (Paczynski, 1986).

Varësia kohore e amplifikimit jepet në figurën 2, duket qartë që amplifikimi arrin vlerën maksimale kur distanca lente-yll u merr vlerën minimale u_0 .

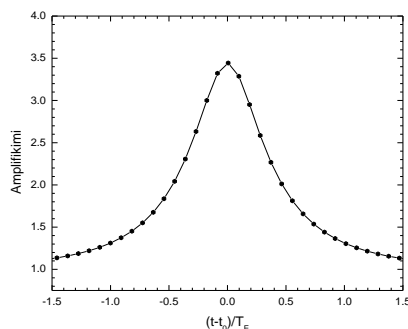


Figura 2. Varësia kohore e amplifikimi të një ngjarje mikropërthyerje për $u_0 = 0.3$.

Maksimumi i kurbës gjendet nga lidhja $A_{\max} = (2+u_0^2)/(u_0\sqrt{4+u_0^2})$.

Nga analiza e kurbës fotometrike përcaktohen tre parametra: koha kur amplifikimi arrin vlerën maksimale t_0 , koha e Ajnshtajnit $T_E = R_E/v_T$ (v_T është shpejtësia e lentes në lidhje me vijën e vrojtimit) dhe u_0 . Megjithatë, nga këta parametra, vetëm T_E përmban informacion rreth lentes sepse jepet

$$R_E = \theta_E D_L = \sqrt{\frac{4GM D_L}{c^2} \frac{D_S - D_L}{D_S}}.$$

Kjo do të thotë që parametrat e lentes (M , v_T , D_L) nuk mund të përcaktohen në mënyrë të vetme. Për të hequr degjenerimin përdoren efektet e rendit të dytë në kurbat e dritës: a) efekti paralaks nga e cili përcaktohet r_E (rrezja e unazës së Ajnshtajnit në planin e vrojtuesit) dhe efektet e burimeve të

fundme ku përcaktohet θ_E . Nëse këto dy madhësi përcaktohen, atëherë masa e lentes jepet nga formula, $M = c^2 r_E \theta_E / 4G$, ku c është shpejtësia e dritës dhe G konstantja e përgjithshme gravitacionale. Në parim gjenden dy mënyra për përcaktimin e r_E : a) ngjarja është perturbuar nga lëvizja orbitale e vrojtuesit (Tokës), dhe b) kur ngjarja vrojtohet nga dy teleskopë me vendndodhje të ndryshëm. Mënyra e parë përdoret në ngjarjet relativisht të gjata (të rendit të disa muajve), kurse për ngjarjet e shkurtra (të rendit të ditëve) përdoren vrojtimitet e njëkohshme nga dy teleskopë. Nga kurbat fotometrike të tyre përcaktohen komponentet e vektorit të zhvendosjes $\Delta u = (\Delta t_0 / t_E, \Delta u_0)$ i cili lidhet me r_E sipas formulës: $D_{\perp} / r_E = \Delta u$, ku D_{\perp} është distanca midis dy teleskopëve në planin e vrojtuesit. Nëse D_{\perp} është relativisht e madhe, atëherë të dy kurbat janë të dalluara mirë nga njëra tjetra (Gould, 1992). Me matjen e zhvendosjen kohore të maksimumit të kurbave $\Delta t_0 = |t_{0T} - t_{0S}|$ dhe ndryshimit $\Delta u_0 = |u_{0T} \pm u_{0S}|$ mund të matet Δu dhe kështu r_E (D_{\perp} është e njohur). Por në përcaktimin e Δu_0 ka një degjenerim të dyfishtë: shënja “ \pm ” varet nëse dy teleskopët ndodhen në të njëjtën anë “ $-$ ” ose në anë të kundërta “ $+$ ” në lidhje me drejtimin e lëvizjes së lentes. Kështu, vlera e r_E nuk mund të përcaktohet në mënyrë të vetme.

Vrojtimi astrometrik

Meqë dy imazhet e prodhuara nga lentja kanë amplifikim të ndryshëm dhe nuk janë të shpërndara simetrikisht, centroidi i tyre është i zhvendosur nga pozicioni i yllit dhe gjatë një ngjarje mikropërthyerje përkruan një elips në lidhje me të (Dominik & Sahu, 2000). Le të konsiderojmë një yll burim që lëviz në planin e lentes me shpejtësi tranzit v_{\perp} dhe le të jenë (ξ, η) një sistem boshtesh koordinativë me qendër tek lentja (shiko fig. 1), boshti ξ është orientuar sipas drejtimit të shpejtësisë dhe boshti η pingul me të. Koordinatat e projektuara të yllit në planin e lentes (në njësinë e R_E) janë: $\xi(t) = (t - t_0) / T_E$, $\eta(t) = u_0$ dhe distanca lente-yll jepet nga $u^2 = \xi^2 + \eta^2$. Të dyja imazhet lëvizin në planin e lentes në distancat $u_{\pm}^{\circ} = (u \pm \sqrt{4 + u^2}) / 2$ nga lentja dhe centroidi i tyre përcaktohet si një pozicion i mesatarizuar i dy imazheve të peshuara sipas amplifikimit përkatës (Walker, 1995)

$$\bar{u} = \frac{u_{+}^{\circ} A_{+} + u_{-}^{\circ} A_{-}}{A_{+} + A_{-}} = \frac{u(u^2 + 3)}{u^2 + 2},$$

i cili shtrihet në të njëjtin kënd me yllin. Madhësia e matëshme është zhvendosja e centroidit të imazheve në lidhje me burimin

$$\Delta = \bar{u} - u = \frac{u}{u^2 + 2},$$

i cili është një funksion i kohës, meqë u varet nga koha.

Zhvendosja e centroidit Δ mund të shfaqet si një vektor me komponente sipas boshteve:

$$\Delta_\xi = \frac{\xi(t)}{u^2 + 2}, \quad \Delta_\eta = \frac{\eta(t)}{u^2 + 2}.$$

Këtu madhësitë janë dhënë në njësinë e rrezes këndore të Ajnshtajnit. Në të vërtetë, zhvendosja e centroidit është proporcionale me θ_E : $\Delta = \frac{u}{u^2 + 2} \theta_E$.

Në mënyrë të drejtpërdrejtë (fig. 3) mund të nxirret që gjatë një ngjarje mikropërthyerje centroidi përshkruan një elips me gjysëm-bosht të madh (përgjatë boshtit ξ) dhe gjysëm-bosht të vogël (përgjatë boshtit η) dhënë nga:

$$a = \frac{1}{2} \frac{\theta_E}{\sqrt{u_0^2 + 2}}, \quad b = \frac{1}{2} \frac{u_0}{u_0^2 + 2} \theta_E \quad (2)$$

Është e evidente që kur $u_0 \rightarrow \infty$, elipsi bëhet rreth me rreze $\theta_E/2u_0$ dhe ai bëhet vijë e drejtë me gjatësi $\theta_E/\sqrt{2}$, për u_0 shumë pranë zeros. Rëndësia më e madhe e vrojtimitve astrometrike është që nga elipsi i vrojtuar, mund të përcaktohen θ_E dhe u_0 (shiko ek. 2)

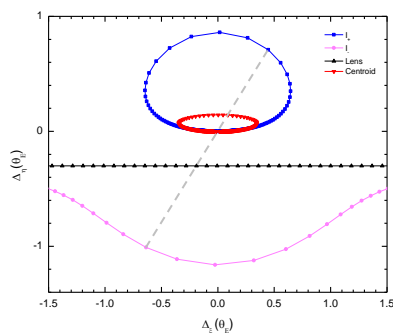


Figura 3. Centroidi është shfaqur në planin $(\Delta_\xi, \Delta_\eta)$ me në qendër yllin burim (pika me ngjyrë të kuqe). Lentja (pika me ngjyrë të zezë) me $M = 10^{-3} M_e$, $D_L = D_S/2$ dhe $u_0 = 0.3$ po lëviz me shpejtësi tranzit $v_T = 100 \text{ km/s}$. Trajektorja që përshkruan imazhi pozitiv është me ngjyrë blu dhe imazhi negativ ngjyrë lejla. Centroidi përshkruan një elips me gjysëm-bosht të madh $a = 0.35$ dhe gjysëmbosht të vogël $b = 0.075$. Të gjitha madhësitë janë dhënë në njësinë e θ_E .

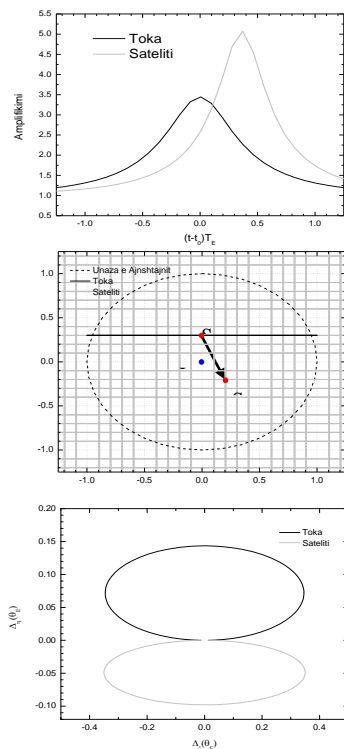


Figura 4. Për një yll në qendër të galaxisë ($D_S = 8.5kpc$) dhe lente ($M = 10^{-3}M_e$, $D_L = D_S/2$, $v_T = 100km/s$) dhe duke konsideruar $u_{0E} = 0.3$ dhe $u_{0S} = 0.2$, kemi ndërtuar kurbat e amplifikimit të vrojtuar nga dy teleskopët (paneli i sipërm), pozicionin e lentes dhe trajektoret e yllit të vrojtuar nga dy teleskopët (paneli i mesit) dhe elipset e vrojtuar nga dy teleskopët (paneli i poshtëm).

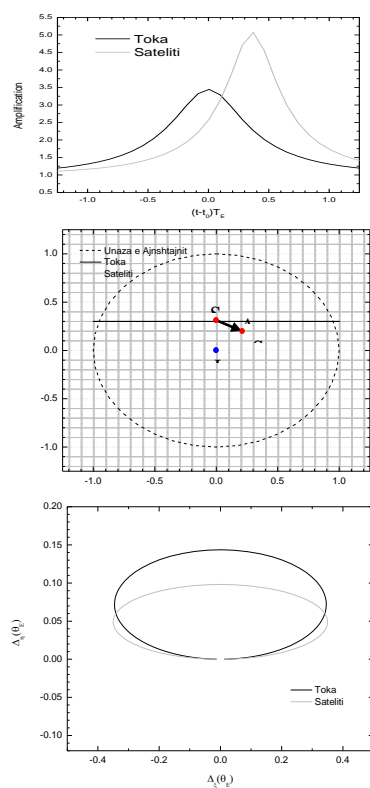


Figura 5. Për një yll në qendër të galaksisë ($D_S = 8.5kpc$) dhe lente ($M = 10^{-3}M_e$, $D_L = D_S/2$, $v_T = 100km/s$) dhe duke konsideruar $u_{0E} = 0.3$ dhe $u_{0S} = 0.2$, kemi ndërtuar kurbat e amplifikimit të vrojtura nga dy teleskopët (paneli i sipërm), pozicionin e lentes dhe trajektoret e yllit të vrojtuar nga dy teleskopët (paneli i mesit) dhe elipset e vrojtuar nga dy teleskopët (paneli i poshtëm).

Vrojtimi astrometrik nga dy teleskopë

Le të konsiderojmë që një ngjarje mikropërthyerje është vrojtuar astrometrikisht nga dy teleskopë. Në figurat e mëposhtme janë treguar elipsat që përshkruajnë centroidët e yllit të vrojtuar nga dy teleskopë (p.sh. në Toka dhe satelit) kur lentja ndodhet midis tyre (fig. 4) dhe kur ajo ndodhet në njërin anë (fig. 5).

Në figurën 4 (paneli i sipërm) jepen dy kurbat e vrojtura fotometrikisht nga dy teleskopët. Duket që ato kanë një zhvendosje kohore në maksimum Δt_0 , dhe amplifikime maksimale të ndryshme, nga të cilat përcaktohet $\Delta u_0 = |u_{0T} \pm u_{0S}|$. Ndërsa për përcaktimin e $\Delta u = \sqrt{(\Delta t_0)^2 + (\Delta u_0)^2}$ nuk dimë nëse duhet të marrim shënjën “+” apo “-” tek Δu_0 . Ky problem zgjidhet nga vrojtimit astrometrike të kryera nga dy teleskopë. Nëse lentja gjatë vrojtimit ndodhet midis dy teleskopëve (paneli i mesit), centroidët i përshkruajnë elipsat në anë të ndryshme dhe në këtë rast $\Delta u_0 = |u_{0T} + u_{0S}|$. Në figurën 5 paraqitet e njëjta ngjarje, por tani teleskopët janë në të njëjtën anë të lentes. Në këtë rast $\Delta u_0 = |u_{0T} - u_{0S}|$. Kështu që vrojtimit të tilla e heqin degjenerimin në përcaktimin e Δu_0 dhe masa e lentes, nëse θ_E matet, përcaktohet në mënyrë të vetme.

Pragu i matjeve fotometrike dhe astrometrike

Një ngjarje vrojtohet fotometrikisht nëse në kurbën e dritës ndodhen tetë pika me amplifikim më të madh se pragu A_{th} , i cili për vrojtimit nga Toka konsiderohet 1.34 dhe nga hapësira 1.001. Ndërsa për vrojtimit astrometrike duhet që zhvendosja maksimale e centroidit $\Delta_{max} \geq \delta_{th}$, ku δ_{th} është pragu astrometrik i teleskopit. Për $u_0 \leq \sqrt{2}$, vlera maksimale e zhvendosjes së centroidit është $\Delta_{max} = 0.35\theta_E$ dhe varet vetëm nga θ_E , por për $u_0 > \sqrt{2}$ maksimumi i tij varet edhe nga vlera e u_0 . Në rastin e fundit ai jepet nga lidhja: $\Delta_{max} = [u_0 / (u_0^2 + 2)]\theta_E$. Për ngjarjet me $\Delta_{max} < \delta_{th}$ mundet që variacioni i përkohshëm i zhvendosjes së centroid të jetë më i madh se pragu astrometrik i teleskopit, $\Delta_{var} \geq \delta_{th}$. Edhe në këtë rast ngjarja është e vrojtueshme. Ngjarjet mikropërthyerje të shkaktuara nga planetet e lira, me rang mase nga $10^{-5}M_e$ në $10^{-2}M_e$, në përgjithësi janë të shkurtra sepse θ_E është e vogël. Për një yll në qendër të Galaksisë dhe planet të lirë në mesin e distancës vrojtues-yll, θ_E është në rangun $3 \div 98 \mu as$ (ek. 1) dhe për ngjarjet me $u_0 \leq \sqrt{2}$ maksimumi i centroidit do të jetë në rangun $1 \div 35 \mu as$. Pra, këto ngjarje mund të dedektohen nga Gaia dhe GRAVITY.

Rezultatet dhe diskutimi

Në këtë punim ne kemi konkluduar që vërtetimet astrometrike të ngjarjeve mikropërthyerje nga dy teleskopë do të heqin degjenerimin në përcaktimin e $\Delta\mu$. Përcaktimi i parametrave të lentes në ngjarjet mikropërthyerje është një problem në vërtetimet fotometrike, por vërtetimet astrometrike të Gaia nga hapësira dhe GRAVITY nga Toka do të ndihmojnë në zgjidhjen e tij. Gjatë periudhës Mars-Korrik 2016, ishin planifikuar vërtetimet fotometrike drejt qendrës së Galaksisë nga tre teleskopë Kepler 2, OGLE dhe Spitzer. Këta ndodhen në planin ekliptik dhe lëvizin në trajektoren e Tokës rreth Diellit duke e ndjekur atë. Distanca e Tokë-K2 është rreth 0.5 AU dhe distanca Tokë-Spitzer 1.48 AU. Tek Hamolli *et al.*, (2017) është përcaktuar eficienta e dedektimit nga dy teleskopë të ngjarjeve mikropërthyerje të shkaktuar nga planetet e lira në diskun e hollë. Është gjetur që probabiliteti është 75% për vërtetimet Tokë-K2 dhe 24% për Tokë-Spitzer. Vërtetimet astrometrike të këtyre ngjarjeve do të ndihmonin në përcaktimin e rrezes së Ajnshtajnit në planin e vërtetimit (r_E) dhe rrezes këndore të Ajnshtajnit (θ_E).

Meqë precisioni astrometrik i Gaia dhe GRAVITY është i rendit μ s, ata do të ndihmojnë në përcaktimin e parametrave të planteve të lira në Galaksinë tonë, sepse rrezja këndore e Ajnshtajnit të tyre është e po këtij rendi. Është e vërtetë që për njohjen e popullimit të planeve të lira në Galaksinë tonë e vetmja metodë është mikropërthyerja gravitacionale, kështu që vërtetimet fotometrike dhe astrometrike nga dy teleskopë do të ndihmonin për përcaktimin e masës dhe shpërndarjes të tyre ngado në të.

Literatura

- Paczynski B. (1986): Gravitational microlensing by the galactic halo. In: ApJ, 384, 1
- Hog E. (2017): Astrometric accuracy during the past 2000 years. In: [arXiv1707.01020H](https://arxiv.org/abs/1707.01020)
- Spergel D. et al., (2015): Wide-Field InfraRed Survey Telescope-Astrophysics Focused Telescope Assets WFIRST-AFTA 2015 Report. In: [2015arXiv150303757S](https://arxiv.org/abs/1503.03757)
- Sumi T. et al., (2011): Unbound or distant planetary mass population detected by gravitational microlensing. In: Nature 473, 349
- Schneider P., Ehlers J. & Falco E. E. (1992): Gravitational Lenses. In: New York, Springer
- Gould A. (1992): Extending the MACHO search to about 10^6 solar masses. In: ApJ. 392, 442
- Dominik M. & Sahu K. (2000) : Astrometric Microlensing of Stars. In: Astrophys. J. 534, 213
- Hamolli L., Paolis F. De, Hafizi M., & Nucita A. A. (2017): Predictions on the detection of the free-floating planet population with K2 and spitzer microlensing campaigns. In : Astrophysical Bulletin. Vol. 72, 80–89
- Walker M. A. (1995): Microlensed image motions. In: Astrophys. J. 453, 37 Eisenhauer F., et al., (2009): GRAVITY: Microarcsecond Astrometry and Deep Interferometric Imaging with the VLT. In: ASSP, 9, 361