VAZHDUESHMËRIA E MULTIFUNKSIONEVE

***ZAJMI (KOTONAJ) E., TELITI XH.**

Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

e-mail:enkeleida.kallushi@fshn.edu.al

Përmbledhje

Në këtë material trajtohet koncepti i vazhdueshmërisë së multi-funksioneve,duke nisur fillimisht me trajtimin e dy koncepteve të gjysmëvazhdueshmërisë nga sipër dhe nga poshtë.Synimi ynë është studimi i koncepteve të mësipërm si në rastin e multifuksioneve të përcaktuar në hapësira metrike dhe atyre të përcaktuar në hapësira topologjike dhe për më tepër shtrirja e tyre në hapësirat e kuazi normuara. Me mjaft interes është trajtimi i veprimeve që mund të kryhen me multifunksionet gjysmë të vazhdueshëm si nga poshtë dhe nga sipër dhe më pas në klasën e multifunksioneve të vazhdueshëm, gjë që përbën pjesën kryesore të trajtimit tonë.

Abstract

In this paper addressed the concept of multifunction's continuity, starting initially with concepts of upper and lower semi-continuity. Our goal is the study of the above concepts as in the case of multifunctions defined in metric spaces and topological spaces and in addition their scope defined in the quasi normed spaces. With great interest is the treatment of mathematical operations with upper and lower semi-continuous multi-functions and after that with continuous multi-functions class, which constitutes the main part of our treatment.

Fjalëkyçe:Multifunksion, funksione me vlera bashkësi, gjysmëvazhdueshmëri, vazhdueshmëri.

Hyrje

Koncepti i gjysmëvazhdueshmërisë së multifunksioneve është paraqitur në vitin 1932 nga Bouligand & Kuratowski.

Dallohen dy lloje gjysmëvazhdueshmërish, gjysmëvazhdueshmëria nga sipër dhe gjysmëvazhdueshmëria nga poshtë. Në vijim do të trajtojmë gjysmëvazhdueshmërinë si për funksionet për të cilët bashkësia e përcaktimit dhe e vlerave janë hapësira metrike edhe në rastin kur këto bashkësi janë hapësira topologjike, duke vazhduar më tej trajtimin e këtyre koncepteve në rastin e hapësirave të kuazi nomuara. Fillimisht vërejmë njëvlershmërinë e përkufizimeve të gjysmëvazhdueshmërisë nga sipër (nga poshtë) në rastin e hapësirave metrike (të cilat siç dihet mund të shihen edhe si hapësira topologjike).

Meqënëse gjenden shembuj multifunksionesh të cilët janë gjysmë të vazhdueshëm nga sipër por jo nga poshtë ose anasjelltas, futet kuptimi i multifunksioneve të vazhdueshëm të cilët janë njëkohësisht gjysmë të vazhdueshëm nga sipër dhe nga poshtë. Në këtë material jemi përqendruar fillimisht në evidentimin e disa vetive të multifunksioneve gjysmë të vazhdueshëm nga sipër (nga poshtë) dhe më pas kemi kërkuar të shohim se cilat prej këtyre vetive shtrihen edhe për vazhdueshmërinë. Në koleksionin e multifunksioneve mund të kryhen veprime të ndryshme. Le të themi se kemi veprimin $*$ i cili përcaktohet si vijon: $F_1 * F_2$: $x\to F_1(x) * F_2(x)$. Në këtë mënyrë mund të përcaktojmë $F_1\cap F_2$, $F_1\cup F_2$, F_1+F_2 (në hapësirën vektoriale), $F_1 \times F_2$ etj. Në mënyrë të ngjashme,në qoftë se funksioni α: $2^Y\to 2^Y$ përcaktojmë $\alpha(F):x\to\alpha(F(x))$.

Për shembull,do të përdorim shënimin $\overline{F}$ për multifunksionin $x\to\overline{F(x)}$.

Për më tepër, përcaktojmë multifunksionin kompozim të multifunksioneve $F_1:X\to 2^Y$ dhe $F_2:Y\to 2^Z$ në mënyrë të tillë që, për çdo $x\in X$ marrim $(F_1\circ F_2)(x) = \bigcup_{y\in F_1(x)} F_2(y)$.

Po përmendim këtu një përfundim interesant mbi vazhdueshmërinë e multi funksioneve:

Le të jenë X, Y dy hapësira të kuazi normuara, $F_1 : X \to 2^Y$, $F_2 : X \to 2^Y$ dy multifunksione të tillë që çdo $x\in X$ ka vend relacioni $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \phi$. Janë të vërteta pohimet:

a)Në qoftë se F_1 dhe F_2,janë multifunksione të hapur, me vlera të mbyllura dhe gjysmë të vazhdueshëm nga sipër atëherë multifunksioni $F_1\cap F_2$ është i vazhdueshëm.
b)Në qoftë se F_1 është multifunksion i vazhdueshëm, me vlera të mbyllura dhe F_2 është multifunksion i hapur, me vlera të mbyllura dhe gjysmë i vazhdueshëm nga sipër atëherë multifunksioni $F_1\cap F_2$ është i vazhdueshëm.

Pohime të tilla janë vënë re edhe për kompozimin e multifunksioneve, shumën e tyre etj.

Njohuri paraprake

Le të jenë X dhe Y hapësira topologjike.Një relacion $F:X\to Y$ është një nënbashkësi e $X\times Y$.Përndryshe, F mund të konsiderohet si një funksion i X në bashkësinë e gjithë nënbashkësive të Y. Bashkësi përcaktimi e relacionit F quhet bashkësia $\mathrm{Dom}(F) = \{x \in X : F(x) \neq \phi\}$; bashkësi e vlerave të F quhet bashkësia $Rang(F) = \bigcup_{x\in Dom(F)} F(x)$ dhe graf i F quhet bashkësia $\mathrm{Graph}(F) = \{(x, y) : x \in Dom(F), y \in F(x)\}$.

Nëse duam të theksojmë vetitë e F si një nënbashkësi e $X\times Y$ i referohemi grafit të tij (Abebe & Geletu, 2006).

Përkufizim 1

Në qoftë se për çdo $x\in X$ gjendet një bashkësi korresponduese jo boshe $F(x)\subset Y$, atëherë F quhet multifunksion i X në Y dhe shënohet $F:X\to 2^Y$.Pra një multifunksion është një relacion me bashkësi përcaktimi X.

Përkufizim 2

i. Një multifunksion $F:X\to 2^Y$ quhet me vlera të mbyllura,të hapura ose kompakte në qoftë se,për çdo $x\in X$, F(x) është respektivisht, një bashkësi e mbyllur, e hapur ose kompakte në Y. Për më tepër, në qoftë se Y është hapësirë vektoriale topologjike dhe për çdo $x\in X$, F(x) është një bashkësi konvekse në Y,atëherë F quhet me vlera konvekse.
ii. Një multifunksion $F:X\to 2^Y$ quhet i mbyllur, i hapur ose kompakt në qoftë se Graph(F) është, respektivisht,bashkësi e mbyllur,e hapur ose kompakte sipas topologjisë produkt të $X\times Y$.Për më tepër, në qoftë se X dhe Y janë hapësira vektoriale topologjike, atëherë F quhet konveks në qoftë se grafi i tij është një bashkësi konvekse sipas topologjisë produkt të $X\times Y$.

Ka dy mënyra për të përcaktuar imazhin e anasjelltë të nënbashkësisë M me anë të një multifunksioni F.

$$\text{(i)}\quad F^{-}(\mathrm{M}) = \{x \in X : F(x) \cap \mathrm{M} \neq \phi\} \qquad \text{(ii)}\quad F^{+}(\mathrm{M}) = \{x \in X : F(x) \subset \mathrm{M}\}$$

Nënbashkësia $F^{-}(\mathrm{M})$ quhet parafytyrë e M me anë të F, kurse nënbashkësia $F^{+}(\mathrm{M})$ quhet bërthamë e M në lidhje me F. Vërejmë që kanë vend barazimet $F^{-}(\mathrm{Y}\setminus \mathrm{M}) = X \setminus \mathrm{F}^{+}(\mathrm{M})$ dhe $F^{+}(\mathrm{Y}\setminus \mathrm{M}) = \mathrm{X}\setminus \mathrm{F}^{-}(\mathrm{M})$.

•Vërehet lehtë se në qoftë se $f:X\to Y$ është një funksion atëherë për çdo bashkësi $M\subset Y$ ka vend barazimi $f^{-}(\mathrm{M}) = \mathrm{f}^{+}(\mathrm{M}) = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{M})$.

Le të jenë X,Y,Z hapësira të kuazi normuara.Sipas teoremës Aoki-Rolewicz topologjia e fituar nga kuazi norma është e metrizueshme, pra në qoftë se një p-normë $|||.|||$ është ekuivalente me kuazi-normën origjinale, atëherë barazimi $d(x,y) = |||x-y|||^p$ përcakton një metrikë që sjell të njëjtën topologji.Kështu që X,Y,Z mund të konsiderohen hapësira metrike,ku d është metrika e mësipërme.

Përkufizim 3

Fqinjësi e bashkësisë $A \subset X$ quhet çdo bashkësi $B(A,r) = \{x \in X : d(x, A) \le r\}$ ku $r > 0$ dhe d(x,A) është largesa e pikës x nga bashkësia A.

Gjysmëvazhdueshmëria

Tani të fokusohemi tek koncepti i gjysmëvazhdueshmërisë:

Përkufizim 4 (Jean-Pierre Aubin, Hélène Frankowska,1990)

Një multifunksion $F: X \to 2^Y$ quhet gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në pikën $x \in X$ në qoftë se për çdo fqinjësi U të F(x) gjendet një $r > 0$ e tillë që për çdo $x' \in B(x,r)$ të kemi $F(x') \subset U$.

Multifunksioni quhet gjysmë i vazhdueshëm nga sipër atëherë dhe vetëm atëherë kur ai është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në çdo pikë të bashkësisë së tij të përcaktimit.

Përkufizimi i mësipërm mund të shkruhet si vijon, nëse X dhe Y janë hapësira topologjike.

Përkufizim 4’ (Abebe & Geletu, 2006)

Një multifunksion $F: X \to 2^Y$ quhet gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në pikën $x \in X$ në qoftë se për çdo bashkësi të hapur $V \subset Y$ të tillë që $F(x) \subset V$ gjendet një fqinjësi $U \subset X$ e x e tillë që: $\forall x' \in U$: $F(x') \subset V$ pra $U \subset F^{+}(V)$.

Vërejtje 5

Përkufizimi i mësipërm është një adaptim i natyrshëm i përkufizimit të një funksioni të vazhdueshëm.Lind pyetja:Pse kemi përdorur termin gjysmë vazhdueshmëri nga sipër në vend të atij vazhdueshmëri? Një nga arsyet është që karakteristika e funksioneve të vazhdueshëm: një funksion f është i vazhdueshëm në x atëherë dhe vetëm atëherë kur,për çdo varg pikash që konvergjon në x vargu korrespondues i vlerave të funksionit konvergjon në f(x);nuk mbetet e vërtetë në rastin e multifunksioneve.

Në rastin e multifunksioneve, një version i kësaj karakteristike formulohet në përkufizimin që vijon.

Përkufizim 6 (Aubin & Frankowska, 1990)

Një multifunksion $F:X \to 2^Y$ quhet gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në pikën $x \in X$ në qoftë se për çdo $y \in F(x)$ dhe për çdo varg elementesh x_n në X që konvergjon në pikën x, gjendet një varg elementesh $y_n \in F(x_n)$ që konvergjon në y.

Multifunksioni quhet gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë atëherë dhe vetëm atëherë kur ai është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në çdo pikë të bashkësisë së tij të përcaktimit.

Përkufizimi i mësipërm mund të shkruhet si vijon, nëse X dhe Y janë hapësira topologjike.

Përkufizim 6’ (Abebe & Geletu, 2006)

Një multifunksion $F: X\to 2^Y$ quhet gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në pikën $x\in X$ në qoftë se për çdo bashkësi të hapur $V\subset Y$ të tillë që $F(x)\cap V\neq\phi$ gjendet një fqinjësi $U\subset X$ e x e tillë që: $\forall x\in U$, $F(x)\cap V\neq\phi$ pra $U\subset F^{-}(V)$.

Vërejtje 7

Duke patur parasysh se çdo hapësirë metrike është hapësirë topologjike (topologjia është e gjeneruar nga metrika e saj) është e qartë se në rastin kur X dhe Y janë hapësira metrike përkufizimet 4 dhe 4’ janë të njëvlershëm, e njëjta gjë thuhet edhe për përkufizimet 6 dhe 6’.Patjetër që kjo mbetet e vërtetë edhe në rastin e hapësirave të kuazi-normuara që janë hapësira vektoriale topologjike të metrizueshme.

Po tregojmë njërën nga ekuivalencat e përmendura më sipër.Le të tregojmë ekuivalencën e përkufizimeve 6 dhe 6’.

Supozojmë se multifunksioni F është gjysmë i vashdueshëm nga poshtë në pikën x sipas përkufizimit 6.Për çdo bashkësi të hapur $V\subset Y$ të tillë që $F(x)\cap V\neq\phi$ gjendet një pikë $y\in F(x)$ dhe $y\in V$.Kështu që ekziston $r>0$ e tillë që $B(y,r)\subset V$.

Supozojmë se, për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet $x'\in B(x,\varepsilon)$ i tillë që $F(x')\cap V=\phi$.Marrim një varg ε_n konvergjent në zero dhe për çdo $n\in N$ shënojmë me x_n një nga elementet e $B(x,\varepsilon_n)$ që nuk bën pjesë në $F^{-}(V)$.Vargu x_n është një varg konvergjent në x dhe nga përkufizimi 6 gjendet vargu $y_n\in F(x_n)$ i tillë që konvergjon në y. Kështu që $y_n\in B(y,r)\subset V$ për çdo $n\geq n_1$,prandaj $F(x_n)\cap V\neq\phi$ që kundërshton zgjedhjen e vargut x_n. Pra treguam se multifunksioni F(x) është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë edhe sipas përkufizimit 6’.

Anasjelltas, le të jetë multifunksioni F(x) gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në x sipas përkufizimit 6’.Për çdo $y\in F(x)$ marrim si bashkësi hapur që përmban y rruzullin $V=B(y,\varepsilon)$.Nga përkufizimi 6’ gjendet një fqinjësi U e x e tillë që për çdo $x\in U$ kemi $F(x)\cap V\neq\phi$.Kështu që ekziston $r>0$ e tillë që $B(x,r)\subset U$ dhe çdo $x'\in B(x,r)$ bën pjesë në $F^{-}(V)$.Le të jetë x_n një varg çfarëdo në X që konvergjon në x.Termat e këtij vargu bëjnë pjesë në B(x,r) duke filluar nga një indeks natyror n_0 dhe si rrjedhim bëjnë pjesë edhe në $F^{-}(V)$.Kështu që për çdo $n\geq n_0$ shkruajmë $F(x_n)\cap V\neq\phi$ dhe si rrjedhim gjenden $y_n\in F(x_n)$ dhe $y_n\in V$.Pra është e qartë se vargu

y_n konvergjon në y.Treguam në këtë mënyrë që multifunksioni F(x) është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë edhe sipas përkufizimit 6.

Gjenden multifunksione të cilët kënaqin njërën nga gjysmëvazhdueshmëritë por nuk kënaqin gjysmëvazhdueshmërinë tjetër.Shembujt që vijojnë janë trajtuar në R e pajisur me metrikën e zakonshme.

Tregohet lehtë se multifunksioni $F_1{:}R \to 2^R$ i përcaktuar nga barazimi: $F_1(x) = \begin{cases} [-1,1] \text{ per} x \neq 0 \\ \{0\} \ per x = 0 \end{cases}$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në zero,por nuk është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në të,ndërsa multifunksioni $F_2{:}R \to 2^R$ i përcaktuar nga barazimi: $F_2(x) = \begin{cases} \{0\} \ per x \neq 0 \\ [-1,1] \text{ per} x = 0 \end{cases}$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në zero,por nuk është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në të.

Përkufizim 8

Multifunksioni F quhet i vazhdueshëm në pikën $x \in X$ në qoftë se ai është njëkohësisht gjysmë i vazhdueshëm nga sipër dhe gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në x, dhe ai quhet i vazhdueshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur është i vazhdueshëm në çdo pikë të bashkësisë së përcaktimit të tij.

Le të ndalemi tani disa veti të multifunksioneve gjysmë të vazhdueshëm.

Le të jetë $F{:}X \to 2^Y$ një multifunksion dhe X,Y hapësira topologjike (metrike). Multifunksioni F është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër (nga poshtë) në qoftë dhe vetëm në qoftë se për çdo $V \subset Y$ të hapur edhe bashkësia $F^{+}(V)$ (bashkësia $F^{-}(V)$) është e hapur në X,në qoftë dhe vetëm në qoftë se për çdo $W \subset Y$ të mbyllur atëherë edhe bashkësia $F^{-}(W)$ (bashkësia $F^{+}(W)$) është e mbyllur në X.(Abebe & Geletu, 2006).

Le të jenë X,Y,Z hapësira topologjike (metrike),$F_1{:}X \to 2^Y$ dhe $F_2{:}Y \to 2^Z$ multifunksione gjysmë të vazhdueshëm nga sipër (nga poshtë) atëherë multifunksionet $F_2 \circ F_1{:}X \to 2^Z$, $F_1 \cup F_2$ janë gjithashtu gjysmë i vazhdueshëm nga sipër (nga poshtë).(Abebe & Geletu,2006)

Në qoftë se $F{:}X \to 2^Y$ është një multifunksion gjysmë i vazhdueshëm nga sipër dhe Y është një hapësirë topologjike normale atëherë $\overline{F} : X \to 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.(Abebe & Geletu, 2006)

Në qoftë se $F:X\rightarrow 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë atëherë edhe $\overline{F}:X\rightarrow 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.(Abebe & Geletu, 2006)

• Le të jenë $F,G: X\rightarrow 2^Y$ dy multifunksione.Në qoftë se F është i mbyllur dhe G është kompakt dhe gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në $x\in X$ dhe për çdo $x\in X$ ka vend relacioni $F_1(x)\cap G(x)\neq\phi$ atëherë $F\cap G$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në x.**(**Aubin & Frankowska, 1990).

Le të jenë $F_1:X\rightarrow 2^Y$ multifunksion gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë dhe $F_2:X\rightarrow 2^Y$ multifunksion i hapur të tillë që për çdo $x\in X$ ka vend relacioni $F_1(x)\cap F_2(x)\neq\phi$ .Atëherë multifunksioni $F_1\cap F_2\neq\phi$ është gjithashtu gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.(Abebe & Geletu, 2006)

Në qoftë se $F_1:X\rightarrow 2^Y$,$F_2:X\rightarrow 2^Y$ janë multifunksione me vlera kompakte, gjysmë të vazhdueshëm nga sipër dhe Y është hapësirë vektoriale topologjike atëherë $F_1 + F_2$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.(Abebe & Geletu 2006).

Në qoftë se $F_1:X\rightarrow 2^Y$,$F_2:X\rightarrow 2^Y$ janë multifunksione gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë dhe Y është një hapësirë vektoriale topologjike atëherë edhe multifunksioni $F_1+F_2:X\rightarrow 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.(Abebe & Geletu, 2006)

Rezultate

Vërejtje 9

Vërejmë se në një hapësirë metrike çdo fqinjësi e një bashkësie,sipas përkufizimit 3,është edhe fqinjësi e mbylljes së saj.

Kështu që nga përkufizimi 4 arrijmë në përfundimin se multifunksionet $F:X\rightarrow 2^Y$ dhe $\overline{F}:X\rightarrow 2^Y$ ku X,Y janë hapësira metrike,janë (ose nuk janë) njëkohësisht gjysmë të vazhdueshëm nga sipër.

Pohim 10

Në qoftë se $\overline{F}:X\rightarrow 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë atëherë edhe $F:X\rightarrow 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.

Vërtetim

Le të jetë $x\in X$ e çfarëdoshme dhe $V\subset Y$ një bashkësi e hapur e tillë që $F(x)\cap V\neq\phi$ .Meqë $F(x)\subset\overline{F(x)}$ atëherë ka vend relacioni $\overline{F(x)}\cap V\neq\phi$.

Nga përkufizimi i gjysmëvazhdueshmërisë nga poshtë për multifunksionin $\overline{F}$ shkruajmë:Gjendet një fqinjësi U_x e pikës x e tillë që për çdo $x\in U_x$ ka vend relacioni $\overline{F(x)} \cap V \neq \phi$.Kështu që gjenden pika takimi të bashkësisë F(x) që bëjnë pjesë në bashkësinë e hapur V dhe si rrjedhim nga përkufizimi i pikës së takimit arrijmë në përfundimin se $F(x)\cap V\neq\phi$.Treguam kështu se multifunksioni F(x) plotëson përkufizimin 6'.

Kështu që arrijmë në përfundimin:

• Multifunksioni $F:X\to 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në qoftë dhe vetëm në qoftë se $\overline{F} : X\to 2^Y$ është i tillë.

Vërejtje 11

Çdo multifunksion $F:X\to 2^Y$ me vlera të hapura është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.

Vërtetim

Meqë bashkësia e përcaktimit të një multifunksioni është X atëherë ka vend barazimi $\mathrm{GraphF} = X\times\left(\cup_{x\in X} F(x)\right)$.Bashkësia $\cup_{x\in X} F(x)$ është e hapur në Y dhe si rrjedhim bashkësia GraphF është e hapur në hapësirën X×Y,pra F është i hapur.

Në rastin kur X dhe Y janë hapësira të normuara apo të kuazi normuara mund të adaptojmë konceptin e multifunksionit Lipschitz-ien.

Përkufizim 12

Multifunksioni $F:X\to 2^Y$ është Lipschitz-ien rreth pikës $x\in X$ në qoftë se gjenden l>0 dhe fqinjësia U_X e pikës x të tilla që, për çdo dy pika $x_1,x_2\in U_X$ ka vend relacioni $F_1(x) \subset F_2(x) + l\left\|x_1 - x_2\right\| B_Y$ ku B_Y është shënuar rruzulli njësi në Y.

Pohim 13

Çdo multifunksion $F:X\to 2^Y$ Lipschitz-ien rreth pikës $x\in X$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në pikën x.

Vërtetim

Konsiderojmë rastin e hapësirave të kuazi normuara të cilat janë hapësira metrike sipas metrikës d të përcaktuar më lart (në mënyrë analoge trajtohet edhe rasti i hapësirave të normuara).

Meqë U_x,ekzistenca e të cilit garantohet në përkufizimin 12,është fqinjësi e pikës x, atëherë gjendet një $r > 0$ e tillë që $B(x,r) \subset U_x$.

Kështu që për $\varepsilon_1 = \min\left\{r, \left(\frac{\varepsilon}{l}\right)^p\right\}$ ku p i korrespondon p-normës ekuivalente me kuazi normën në X dhe ε është një numër pozitiv sado i vogël, kemi që $B(x,\varepsilon_1) \subset U_x$.Nga ana tjetër F(x) është Lipschitz-ien rreth pikës x dhe si rrjedhim për çdo $x' \in B(x,\varepsilon_1)$ shkruajmë $F(x') \subset F(x) + l\|x'-x\|B_Y$. Nga relacioni i fundit vërejmë se: për çdo $y \in F(x')$ gjenden $y_1 \in F(x)$ dhe $y_2 \in l\|x'-x\|B_Y$ të tilla që $y = y_1 + y_2$ .Kështu që $d_1(y_1, y) = \|y_1 - y\|^p = \|y_2\|^p \le l\frac{\varepsilon}{l} = \varepsilon$ na lejon të shkruajmë $d(F(x),y) \le \varepsilon$.Pra kemi treguar se $F(x') \subset B(F(x),\varepsilon)$, që i jep fund vërtetimit.

Shënim 14

Vërtetimi i pohimit të mësipërm mund të bëhet edhe duke u bazuar në faktin që hapësira e kuazi normuar është një hapësirë vektoriale topologjike.

Bashkësia $l\|x'-x\|B_Y$ është një fqinjësi e zeros dhe duke marrë brendësinë e saj, nëse ajo nuk është e hapur,arrijmë në përfundimin se:

Bashkësia $F(x) + l\|x'-x\|B_Y$ është një bashkësi e hapur në Y që përmban F(x’) (kemi parasysh që shuma e një bashkësie çfarëdo me një bashkësi të hapur është bashkësi e hapur (Charalambos *et al*. 2006)). Zgjedhja e pikave x dhe x’ sado afër na lejon të themi që çdo bashkësi e hapur në Y që përmban F(x) e përmban atë bashkë me një bashkësi të tipit $F(x) + l\|x'-x\|B_Y$,pavarësisht nga fakti që $l\|x'-x\|B_Y$ mund të mos jetë e hapur.Kështu që nga përkufizimi 12 rrjedh menjëherë gjysmëvazhdueshmëria nga sipër e F(x) në pikën x.

Vërejtje 15

1.Meqë relacioni në përkufizimin 12 ka vend për çdo dy pika $x_1, x_2 \in U_x$ dhe vërtetimi i pohimit 13 përdor këtë relacion duke fiksuar njërën pikë si x dhe tjetrën si pikë çfarëdo në një rruzull me qendër në x arrijmë në përfundimin se: Në qoftë se multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është Lipschitz-ien rreth pikës $x \in X$ atëherë gjendet një fqinjësi e x-it,konkretisht $B(x,\varepsilon_1)$ përmendur në vërtetim, ku F(x) është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.
2. E anasjellta e pohimit 13 nuk është e vërtetë.

Le t'i rikthehemi shembullit të multifunksionit $F_2:R\to 2^R$ të përcaktuar nga barazimi $F(x)=\begin{cases}\{0\} & per x\neq 0\\ [-1,1] & per x=0\end{cases}$.

Ky multifunksion është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në pikën zero.Nga ana tjetër,nëse marrim një fqinjësi çfarëdo të zeros dhe pikën x' në këtë fqinjësi sado afër zeros,vërejmë se $F(0) = [-1,1] \not\subset \{0\}+1|x'-0|B_Y = B(0,\varepsilon)$ ku $\varepsilon = l\varepsilon'<1$,për numrin pozitiv sado i vogël ε' që është largesa e pikës x' nga zeroja.Prandaj përkufizimi 12 nuk plotësohet dhe multifunksioni nuk është Lipschitz-ien rreth pikës zero.

Le të jenë $F_1:X\to 2^Y$, $F_2:X\to 2^Y$ janë multifunksione të tillë që $F_1(x)\cap F_2(x)\neq\phi$ për çdo $x\in X$.Vërejmë se ka vend pohimi që vijon:

Pohim 16

Në qoftë se $F_1:X\to 2^Y$, $F_2:X\to 2^Y$ janë multifunksione me vlera të mbyllura gjysmë të vazhdueshëm nga sipër dhe Y është hapësirë topologjike normale atëherë edhe multifunksioni $F_1\cap F_2$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.

Vërtetim

Le të jetë $V\subset Y$ një bashkësi e hapur e tillë që $F_1(x)\cap F_2(x)\subset V$. Bashkësitë $F_1(x)\backslash V$ dhe $F_2(x)\backslash V$ janë të mbyllura jo prerëse,sepse $(F_1(x)\backslash V)\cap(F_2(x)\backslash V) = F_1(x)\cap V^C\cap F_2(x)\subset V\cap V^C=\phi$.Meqë hapësira Y është hapësirë topologjike normale,gjenden të hapurat jo prerëse G_1 dhe G_2 të tilla që $F_1(x)\backslash V\subset G_1$ dhe $F_2(x)\backslash V\subset G_2$ .Kështu që $F_1(x)\subset G_1\cup V$ dhe $F_2(x)\subset G_2\cup V$.

Si përfundim:Çdo e bashkësi e hapur $V\subset Y$ që përmban $F_1(x)\cap F_2(x)$ shprehet si prerje e dy bashkësive të hapura,në këtë rast $G_1\cup V$ dhe $G_2\cup V$,që përmbajnë përkatësisht $F_1(x)$ dhe $F_2(x)$.

Meqë $F_1(x)$ dhe $F_2(x)$ janë gjysmë të vazhdueshëm nga sipër në pikën $x\in X$,gjenden fqinjësitë U_x,V_x të pikës x të tilla që:Për çdo $x'\in U_x$ dhe për çdo $x''\in V_x$ janë të vërteta relacionet $F_1(x')\subset G_1\cup V$ dhe $F_2(x'')\subset G_2\cup V$. Prandaj për çdo $x\in U_x\cap V_x=W_x$ kemi $F_1(x)\cap F_2(x)\subset V$.

Duke patur parasysh se hapësira e kuazi normuar është hapësirë vektoriale topologjike e metrizueshme (Miroslav Pavlović,2004) dhe që çdo hapësirë metrike është hapësirë topologjike normale, arrijmë në përfundimin se ka vend përfundimi që vijon.

Rrjedhim 17

Në qoftë se $F_1:X\to 2^Y$, $F_2:X\to 2^Y$ janë multifunksione me vlera të mbyllura, gjysmë të vazhdueshëm nga sipër dhe X,Y janë hapësira të kuazi normuara atëherë edhe multifunksioni $F_1\cap F_2$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.

Nga sa thamë më lart, janë të vërteta pohimet:

- Në qoftë se $F_1:X\to 2^Y$ dhe $F_2:X\to 2^Y$ janë multifunksione të vazhdueshëm dhe X,Y janë hapësira të kuazi normuara atëherë multifunksionet $F_2 \circ F_1$ dhe $F_1\cup F_2$ janë të vazhdueshëm.
- Le të jenë X,Y hapësira të kuazi normuara.Multifunksioni $F:X\to 2^Y$ është i vazhdueshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur multifunksioni $\overline{F}: X\to 2^Y$ është i vazhdueshëm.
- Le të jenë X,Y hapësira të kuazi normuara dhe $F_1:X\to 2^Y$, $F_2:X\to 2^Y$ dy multifunksione të tillë që çdo $x\in X$ ka vend relacioni $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \phi$. Janë të vërteta pohimet:

a) Në qoftë se F_1 dhe F_2 janë të hapur,me vlera të mbyllura dhe gjysmë të vazhdueshëm nga sipër atëherë $F_1 \cap F_2$ është i vazhdueshëm.

b) Në qoftë se F_1 është multifunksion i vazhdueshëm, me vlera të mbyllura dhe F_2 është multifunksion i hapur, me vlera të mbyllura dhe gjysmë i vazhdueshëm nga sipër atëherë multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është i vazhdueshëm.

- Në qoftë se $F_1:X\to 2^Y$ dhe $F_2:X\to 2^Y$ janë multifunksione të vazhdueshëm me vlera kompakte dhe X,Y janë hapësira të kuazi normuara atëherë multifunksioni F_1+F_2 është i vazhdueshëm.

Literatura

Geletu A. (2006): Intoductions to Topological spaces and Set-valued maps,Ilmenau University of Technology ; 89-122

Aliprantis D Ch., Border C. K. (2006): Infinite dimensional Analysis third edition,Springer-Verlag Berlin Heidlberg; 167-171

Aubin J.P., Hélène Frankowska H.(1990): Set-valued Analysis,AMS Subject classification (1985),© Birkhäuser Boston; 33-40

Miroslav Pavlović,(2004): Introduction to function spaces on the disc, Matematički institut SANU, Beograd 2004; 1-11