MBI UNICITETIN E ZGJIDHJES SË PROBLEMIT TË TRANSMISIONIT

***ÇOBANI (HAMZALLARI) B.**

Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

e-mail: besiana.hamzallari@fshn.edu.al

Përmbledhje

Në punimet e mëparshme janë trajtuar probleme në të cilat vala elektromagnetike nuk depërton brenda sipërfaqes së shpërhapësit Ω, i cili nuk është homogjen. Në këtë punim konsiderojmë problemin e shpërhapjes së valëve elektromagnetike gjatë kalimit në një trup johomogjen, por gjithashtu të penetrueshëm dhe ortotropik. Punimi nuk ka si qëllim modelimin e problemit fizik, (trajtim i hollësishëm te [1]), por faktin që ky problem ka së shumti një zgjidhje. Problemi modelohet nga një problem trasmisioni për ekuacionin Helmholtz jashtë shpërhapësit Ω dhe në një ekuacion me koifiçenta variabël në brendësinë e tij. Si mjete, për të arritur në përfundimin që nuk mund të kemi më shumë se një zgjidhje, janë përdorur identitetet e Green-it, gjithashtu dhe lema Relich.

Abstract

In the previous works we were dealing with the scattering by an impenetrable obstacles, the scatterer has always been an imperfect impenetrable conductor. In this paper we consider the scattering of electromagnetic waves by a penetrable media which is also orthotropic. The goal of this work and the study that will follow, does not have a physical purpose (we refer to [1] for a thoroughly physical interpretation), but to show that the forward problem is well-posed. This problem is modeled as a transmission problem for the Helmholtz equation in the exterior of the scatterer Ω and in a variable coefficients equation inside Ω. In this problems we operate in Sobolev spaces and search for a weak solution. To arrive at the conclusion that the above problem has at most one solution, first we use the Green Identities and the Relich lemma.

Fjalëkyçe : eliptik, Sobolev, Relich, Green.

Hyrje

Problemet e transmisionit janë probleme eliptike me vlera kufitare që modelojnë përgjithësisht probleme gjeofizike. Në problemin tonë konkretisht do të trajtohet rasti i shpërndarjes së valëve elektromagnetike në një cilindër të pafundëm ortotropik. Fillimisht do shtrojmë problemin, më pas do e paraqesim në formë variacionale dhe së fundmi punimi do fokusohet në numrin e zgjidhjeve të problemit.

Materiali dhe metodat

Le të jetë $\Omega \subset R^2$ një bashkësi joboshe, e hapur dhe e kufizuar me kontur të lëmuar të gradës dy dhe jashtësia $R^2 \setminus \bar{\Omega}$ është bashkësi e lidhur. Vektori njësi normal me kufirin $\partial\Omega$, i drejtuar së jashtmi zonës Ω shënohet me ν. Në mbylljen $\bar{\Omega}$, përcaktohet një funksion me vlera matricore $A : \bar{\Omega} \to C^{2x2}$, $A = (a_{jk})_{j,k=1,2}$ ku funksionet a_{jk} janë me derivate të parë të vazhdueshëm. Me shënimin Re(A) do kuptojmë funksionin me vlera matricore që ka si parafytyrë pjesët reale të elementëve $a_{j,k}$, pra Re $(a_{j,k})$, dhe përcaktojmë Im(A) në mënyrë analoge. Gjatë gjithë punimit supozojmë gjithashtu që Re(A) dhe Im(A), $x \in \bar{\Omega}$, janë matrica simetrike që plotësojnë kushtet $\bar{\xi} \cdot \mathrm{Im}(A)\xi \leq 0$ dhe $\bar{\xi}\,\mathrm{Re}(A)\xi \geq \gamma|\xi|^2$, $\xi \in C^3$ dhe $x \in \bar{\Omega}$, ku $\gamma > 0$. Gjithashtu supozojmë që $n \in C(\bar{\Omega})$, ku $\mathrm{Im}(n) \geq 0$.

Për funksionet $u \in C^1(R^2 \setminus \Omega)$ dhe $w \in C^1(\bar{\Omega})$ përcaktohen më poshtë dy derivatet sipas dretimit të normales dhe conormales

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \to 0^+} \nu(x) \cdot \nabla u(x + h\nu(x)), \quad x \in \partial\Omega$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_A}(x) = \lim_{h \to 0^+} \nu(x) \cdot A(x)\nabla w(x - h\nu(x)), \quad x \in \partial\Omega$$

Pas këtij përcaktimi, mund të formulojmë matematikisht problemin e shpërhapjes se valëve hyrëse harmonike në lidhje me kohën si problemin e gjetjes së funksioneve $w \in C^1(\bar{\Omega})$, $u \in C^1(R^2 \setminus \bar{\Omega})$ të tillë që

$$\nabla \cdot A\nabla w + k^2 n w = 0 \quad \text{në} \quad \Omega$$

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \quad \text{në} \quad R^2 / \bar{\Omega}$$

$$w - u^s = -\eta \frac{\partial(u^s + u^i)}{\partial \nu} + u^i \quad \text{në} \quad \partial\Omega$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \text{në} \quad \partial\Omega$$

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0$$

ku $\eta \geq \eta_0 \geq 0$.

Siç shihet qartë në shtrimin e problemit zona në ekuacionin Helmholtz , pra në të dytin është e pakufizuar dhe hapi i parë për përcaktimin e numrit të zgjidhjeve është që problemin ta kalojmë në në zonë të kufizuar. Për këtë na ndihmon kalimi i problemit në formë variacionale dhe operatori Dirichlet Neumann. [shih 2 për trajtim të zgjeruar, 5]. Për më tepër na nevojitet dhe materiali i mëposhtëm

Duke pasur parasysh hapësirën e Sobolevit dhe hapësirën gjurmë gjithashtu , që janë hapësira ku operohet për kalimin e problemit në formë variacionale, tani do zgjerojmë përkufizimin e derivatit sipas drejtimit të konormales $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}$ kur funksioni $u \in H^1(\Omega, \Delta_A)$ ku

$$H^1(\Omega, \Delta_A) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \nabla \cdot A\nabla u \in L^2(\Omega) \right\}$$

pajisur me normën

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega,\Delta_A)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\nabla \cdot A\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Ka vënd teorema e mëposhtme

Teoremë 2.1. Pasqyrimi $\gamma_1 : u \to \frac{\partial u}{\partial \nu_A} := \nu \cdot A\nabla u$ i përcaktuar në $C^\infty(\bar{\Omega})$ mund të zgjerohet në mënyrë të vazhdueshme në një pasqyrim linear, të vazhdueshëm, për lehtësi do e shënojmë përsëri γ_1 me bashkësi fillimi $H^1(\Omega, \Delta_A)$ dhe bashkësi mbarimi $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Kujtojmë që me $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ është shënuar duali i hapësirës gjurmë $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Vërtetim [shih 2].

Si rrjedhim të teoremës së mësipërme mund të zgjeromë rezultatin e teoremës së divergjencës në hapësira më të gjëra funksionesh, konkretisht në funksione të përcaktuar në hapësirat e Sobolevit.

Rrjedhim 2.1. Le të jetë $u \in H^1(\Omega)$ e tillë që $\nabla \cdot A\nabla u \in L^2(\Omega)$ dhe $w \in H^1(\Omega)$ atëherë kemi

$$\int_\Omega \nabla w \cdot A\nabla u \, dx + \int_\Omega w \nabla \cdot A\nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} w\nu \cdot A\nabla u \, ds$$

Nëqoftëse si matricë A marrim matricën njësi dypërmasore , atëherë nga teorema 1 dhe rrjedhimi1 kemi që $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ është i mirëpërcaktuar në $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ për funksione $u \in H^1(\Omega,\Delta) := \{u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Dukeqenëse është e paevitueshme lidhja e teoremës së diveregjencës me identitetet e Green-it, atëherë përfundimet e mësipërme na japin gjithashtu relacionin e mëposhtëm

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} w \, \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \quad u \in H^1(\Omega,\Delta), w \in H^1(\Omega) .$$

Që problemi të kalojë në një zonë të fundme, teknika e përdorur është e njohur. Do të merret një rruzull i hapur S_R me qendër në origjinë që e përmban zonën Ω, dhe fillimisht problemin e zgjidhim në S_R. Më pas me ndihmën e operatorit Dirichlet Neumann ,ne mundësojmë zgjerimin e kufirit ∂S_R, pra të gjendet $u \in H^1(S_R \setminus \bar{\Omega})$ dhe $w \in H^1(\Omega)$ të tillë që

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot A\nabla w + k^2 n w = 0 \text{ në } \Omega \\
&\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{në} \quad S_R / \bar{\Omega} \\
&w - u^s = -\eta \frac{\partial(u^s + u^i)}{\partial \nu} + u^i \quad \text{në} \quad \partial\Omega \qquad (*) \\
&\frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \text{në} \quad \partial\Omega \\
&\frac{\partial u}{\partial \nu} = Tu \qquad \text{në } \partial S_R
\end{aligned}$$

ku T është shënuar operatori Dirichlet Neumann.

Së fundmi teorema e mëposhtme do na mundësojë zbatimin e principit të vazhdueshmërisë së funksionit w.

Teoremë 2.2 Nëqoftëse $w \in H^1(\Omega_1)$ dhe $q \in L^2(\Omega_2)$, plotësojnë relacionin $\nabla \cdot A\nabla w + k^2 n w = q$, atëherë $w \in H^2(\Omega_1)$ dhe $\|w\|_{H^2(\Omega_1)} \le C(\|w\|_{H^1(\Omega_2)} + \|q\|_{L^2(\Omega_2)})$

1. Numri i zgjidhjeve të problemit të transmisionit.

Në teorinë e ekuacioneve diferenciale me derivate të pjesshme , çështja e parë për tu trajtuar lidhet me shtrimin e drejtë ose jot ë problemit të dhënë. Në teoremën e mëposhtme është treguar që problemi ynë ka të shumtën një zgjidhje.

Teoremë 3.1 Problemi (*) ka të shumtën një zgjidhje.

Vërtetim. Le të jetë $w \in H^1(\Omega)$ dhe $u^s \in H^1_{loc}(R^2 \setminus \bar{\Omega})$ zgjidhja e problemit (*) me valë rënëse $u^i = 0$. Le të jetë S_R një rruzull me qendër në origjinë dhe rreze R, i cili përmban zonën $\bar{\Omega}$. Zbatojmë identitetin e parë të Green-it në Ω dhe $(R^2 \setminus \bar{\Omega}) \cap S_R$, duke përftuar relacionet e mëposhtme

$$(\nabla \cdot A\nabla w + k^2 nw, w) = 0$$

$$(\nabla \cdot A\nabla w, w) + (k^2 nw, w) = 0$$

$$\int_\Omega \nabla \cdot A\nabla w \cdot \bar{w}\, dy + k^2 n \int_\Omega w \cdot \bar{w}\, dy = 0$$

$$-\int_\Omega (A\nabla w \cdot \nabla \bar{w}) dy + \int_{\partial\Omega} (A\nabla w) \cdot \nu \cdot \bar{w}\, ds + k^2 n \int_\Omega w \cdot \bar{w}\, dy = 0$$

$$\int_\Omega (A\nabla w \cdot \nabla \bar{w}) dy - k^2 n \int_\Omega w \cdot \bar{w}\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu_A} \bar{w}\, ds \qquad (1)$$

dhe për ekuacionin Helmholtz

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0$$

$$(\Delta u^s + k^2 u^s, u^s) = 0$$

$$(\Delta u^s, u^s) + k^2 (u^s, u^s) = 0$$

$$\int_{S_R \setminus \bar{\Omega}} \Delta u^s \cdot \bar{u}^s\, dy + k^2 \int_{S_R \setminus \bar{\Omega}} u^s \cdot \bar{u}^s\, dy = 0$$

$$-\int_{S_R \setminus \bar{\Omega}} \nabla u^s \cdot \nabla \bar{u}^s\, dy + \int_{\partial S_R} \bar{u}^s \frac{\partial u^s}{\partial \nu} ds + \int_{\partial\Omega} \bar{u}^s \frac{\partial u^s}{\partial \nu} ds + k^2 \int_{S_R \setminus \bar{\Omega}} u^s \cdot \bar{u}^s\, dy = 0$$

$$\int_{S_R \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla u^s|^2 - k^2 |u^s|^2) dy = \int_{\partial S_R} \bar{u}^s \frac{\partial u^s}{\partial \nu} ds - \int_{\partial\Omega} \bar{u}^s \frac{\partial u^s}{\partial \nu} ds \qquad (2)$$

Duke mbledhur dy relacionet (1) , (2) marrim

$$\int_{\Omega}(A\nabla w\cdot\nabla\bar{w}-k^2 n|w|^2)\,dy+\int_{S_R\setminus\bar{\Omega}}(|\Delta u^s|^2-k^2|u^s|^2)\,dy=$$
$$=\int_{\partial\Omega}\bar{w}\frac{\partial w}{\partial\nu_A}ds-\int_{\partial\Omega}\bar{u}^s\frac{\partial u^s}{\partial\nu}ds+\int_{\partial S_R}\bar{u}^s\frac{\partial u^s}{\partial\nu}ds \tag{3}$$

Duke shfrytëzuar kushtin e transmisionit kemi

$$\int_{\partial\Omega}\bar{w}\frac{\partial w}{\partial\nu_A}ds-\int_{\partial\Omega}\bar{u}^s\frac{\partial u^s}{\partial\nu}ds=\int_{\partial\Omega}\bar{w}\frac{\partial u^s}{\partial\nu}ds-\int_{\partial\Omega}\bar{u}^s\frac{\partial u^s}{\partial\nu}ds=$$
$$=\int_{\partial\Omega}(\bar{w}-\bar{u}^s)\frac{\partial u^s}{\partial\nu}ds=\int_{\partial\Omega}(\bar{w}-\bar{u}^s)(\frac{u^s-w}{\eta})ds=$$
$$=\frac{1}{\eta}\int_{\partial\Omega}|w-u^s|^2\,ds$$

Pra përfundimisht relacioni 3 merr formën përfundimtare

$$\int_{\Omega}(A\nabla w\cdot\nabla\bar{w}-k^2 n|w|^2)\,dy+\int_{S_R\setminus\bar{\Omega}}(|\Delta u^s|^2-k^2|u^s|^2)\,dy=$$
$$=\frac{1}{\eta}\int_{\partial\Omega}|w-u^s|^2ds+\int_{\partial S_R}\bar{u}^s\frac{\partial u^s}{\partial\nu}ds$$

Nga supozimi i problemit gjatë modelimit të tij, $\mathrm{Im}(A)\leq 0$, $\mathrm{Im}(n)\leq 0$ dhe $\eta\geq\eta_0\geq 0$, përftojmë

$\mathrm{Im}\int_{\partial S_R}\bar{u}^s\frac{\partial u^s}{\partial\nu}ds\leq 0$ dhe ky mosbarazim implikon $\mathrm{Im}\int_{\partial S_R}u^s\frac{\partial\bar{u}^s}{\partial\nu}ds\geq 0$. Nga lema Relich $u^s=0$ në $R^2\setminus\overline{\partial S_R}$, pra $u^s=0$ në $R^2\setminus\bar{\Omega}$.

Nga kushti i transmisionit gjithashtu w = 0 dhe $\frac{\partial w}{\partial\nu_A}=0$ në $\partial\Omega$.

Që ky rezultat të shtrihet në zonën Ω dhe jo vetëm në kontur të saj, do të përdorim principin e vetëm të vazhdueshmërisë. Kjo është një metodë klasike në problemet e ekuacioneve kur kërkojmë të shtrijmë rezultatin nga kufiri në brendësinë e zonës së studimit. Për këtë qëllim, në fillim zgjerojmë matricën A,e cila është një matricë funksionale, konkretisht pjesën reale të saj Re(A) e zgjerojmë si funksion me derivat të vazhdueshëm simetrike, reale , me vlera positive në $\overline{S_R}$ dhe Im(A) si funksion me derivat të vazhdueshëm simetrike, reale

, me vlera positive me support kompakt në S_R. Gjithashtu zgjerimi i funksionit në $\overline{S_R}$ dhe përcaktojmë $w = 0$ në $S_R \setminus \overline{\Omega}$.

Meqënëse $w = 0$ dhe $\frac{\partial w}{\partial \nu_A} = 0$ në $\partial\Omega$, atëherë $w \in H^1(S_R)$ dhe për më tepër $\nabla \cdot A\nabla w + k^2 n w = 0$ në S_R. Pra jemi në kushte të teoremës 2.2 për funksionin w, pra plotësohen kushtet për zbatimin e principit të vazhdueshmërisë , ku q = 0 dhe meqënëse $w = 0$ në $S_R \setminus \overline{\Omega}$, atëherë $w = 0$ në S_R. Teorema u vërtetua.

Rezultatet dhe diskutime

Në këtë punim u tregua që problemi i transmisionit (*) ka të shumtën një zgjidhje.

Megjithatë çështja që problemi është i shtruar drejt nuk ka përfunduar . Punimi i ardhshëm ka si qëllim dy çështjet e mbetura; gjetjen e zgjidhjes dhe studimin e varësisë së zgjidhjes nga kushtet fillestare në mënyrë që të përfundojë tërësisht shtrimi i drejtë i problemit.

Falënderime

Një falenderim të veçantë dhe të përzemërt për prof. Fioralba Cakoni, e cila mundësoi realizimin e këtij punimi me mbështetjen e saj për të kryer një vizitë shkencore në Delaware University.

Literatura

Cakoni F., Colton D. (2014): Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory Springer

Cakoni F., Colton D. (2005): Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory Springer

Cakoni F, Colton D, Monk P. (2001): The direct and inverse scattering problems for partially coated obstacles, Institute of Physics Publishing

Cakoni F, Rainer Kress. (2007): Integral Equations for Inverse Problems in Corrosion Detection from Partial Cauchy Data, Inverse Problems and Imaging, Volume 1, No.2

Hörmander L (1985): The Analysis of Linear Partial Differential Operators III Springer Berlin

McLean W.(2000): Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations , Cambridge university press

Salsa S. (2008): Partial Differential Equations in Action Springer