NJË TEOREMË E PIKËS FIKSE NË HAPËSIRAT KUAZI 2 BANACH

***LIFTAJ S.[1], GJONI L.[2], KIKINA K.[2]**

[1]Universiteti "A. Moisiu", Durrës, Fakulteti i Teknologjisë së Informacionit Departamenti i Matematikës

[2]Universiteti "E. Çabej", Gjirokastër, Departamenti i Matematikës

e-mail: silvanaliftaj@yahoo.com

Përmbledhje

Shumë autorë kanë studiuar aspekte të ndryshme të teoremës së pikës fikse në hapësirat 2-metrike dhe 2-banach. Në këtë artikull do të vërtetojmë një teoremë të pikës fikse për pasqyrimet në hapësirën kuazi-2-banach me anë të një relacioni implicit. Rezultatet e këtij artikulli shtrijnë një mori rezultatesh të njohura më parë për hapësirën metrike në një hapësirë kuazi-2-banach.

Abstract

A number of authors have studied various aspects of fixed point theory in the setting of 2-metric and 2-banach spaces. In this paper we prove a fixed point theorem for mappings in quasi-2-banach space via an implicit relation. The results of this paper extend a host of previously known results for metric space in a quasi-2-banach space.

Fjalëkyçe: varg koshi, hapësirë huazi-2-banach, pikë fikse.

Hyrje

Më 1965 Gahler iniciojë konceptet e hapësirës 2-metrike dhe hapësirës 2-Banach dhe Iseki në (Iseki, 1975, 1976), gjeti rezultatet kryesore mbi pikat fikse në këto hapësira. Këto hapësira të reja më pas janë studiuar nga mjaft matematikanë (Gangopadhyay *et al*. 2009, 2012, Khan & Khan, 1993, Sharma *et al*, 1979). Së fundi (Badshah & Gupta 2005) janë vërtetuar edhe disa rezultate në hapësirat 2-Banach. Në 2006, Park futi konceptet e hapësirës së kuazi-2-normuar dhe hapësirës së kuazi-(2; *p*)-normuar (Park, 2006). Në këtë artikull do të vërtetojmë një teoremë të pikës fikse për pasqyrimet në hapësirën kuazi-2-Banach me anë të një relacioni implicit.

Përpara se të paraqesim teoremën kryesore po japim disa koncepte të domosdoshme.

Përkufizim 1.1. (Gahler, 1965) Le të jetë X një hapësirë lineare reale me më shumë se një përmasë dhe $\|\cdot,\cdot\|$ një funksion me vlera reale në $X \times X$ që plotëson kushtet e mëposhtme:

$(2\,N_1)$ $\|x, y\| = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur x dhe y janë linearisht të varur në X,

$$(2\,N_2)\ \|x, y\| = \|y, x\| \text{ për çdo } x, y \in X,$$

$(2N_3)$ $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \cdot \|x, y\|$ për çdo real number α;

$(2N_4)$ $\|x, y+z\| \le \|x, y\| + \|x, z\|$ për çdo $x, y, z \in X$.

Funksioni $\|\cdot,\cdot\|$ quhet 2-normë në X dhe çifti $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ quhet hapësirë lineare e 2-normuar. Kështu një 2- normë $\|x, y\|$ gjithmonë plotëson barazimin $\|x, y+\alpha x\| = \|x, y\|$, për çdo $x, y \in X$ dhe për të gjithë skalarët α. Do të përmendim disa shembuj të hapësirave 2-Banach nga literatura bashkëkohore (shiko Açikgoz, 2007, White, 1969).

Shembull 1.2. Le të jetë $X = R^3$ dhe shqyrtojmë 2-normën e mëposhtme në X si:

$$\|x, y\| = \left| \det \begin{Vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{Vmatrix} \right| = \left[(bf - ce)^2 + (cd - af)^2 + (ae - db)^2 \right]^{1/2},$$

ku $x = ai + bj + ck$ dhe $y = di + ej + fk$. Atëherë $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ është hapësirë 2-Banach.

Shembull 1.3. Le të jetë $X = Q^3$, ku Q është fusha e numrave racionalë dhe shqyrtojmë 2-normën e mëposhtme në X si:

$$\|x, y\| = \left| \det \begin{Vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{Vmatrix} \right|,$$

ku $x = ai + bj + ck$ dhe $y = di + ej + fk$, atëherë $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ nuk është hapësirë 2-Banach.

Përkufizim 1.4. [Park, 2006] Le të jetë X një hapësirë lineare. ***Kuazi-2-normë*** është një funksion me vlera reale në $X \times X$ që plotëson tre kushtet e **Përkufizimit 1.1:** $(2N_1)$, $(2N_2)$, $(2N_3)$ dhe kushtin $(2N_4^{\bullet})$: Ekziston një konstante $k \ge 1$ e tillë që

$$\|x+y, z\| \le k\|x, z\| + k\|y, z\| \text{ për çdo } x, y, z \in X.$$

Çifti $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ quhet **hapësirë e *kuazi*-2-*normuar*** në qoftë se $\|\cdot,\cdot\|$ është kuazi-2-normë në X. Vlera më e vogël e mundshme e k quhet modul i konkavitetit të $\|\cdot,\cdot\|$.

Një kuazi-2-norm $\|\cdot,\cdot\|$ quhet kuazi-(2; p)-normë ($0 < p \leq 1$) në qoftë se

$$\|x+y,z\|^p \leq \|x,z\|^p + \|y,z\|^p \text{ për çdo } x,y,z \in X .$$

Përkufizim 1.5. Vargu $\{x_n\}$ në hapësirën kuazi-2-normë $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ quhet **varg Koshi** në qoftë se $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m - x_n, u\| = 0$ për çdo u në X. (Simbolikisht e shënojmë $d(x_m, x_n) = \|x_m - x_n, u\|$)

Përkufizim 1.6. Vargu $\{x_n\}$ në hapësirën kuazi-2-normë $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ quhet **varg konvergjent** në qoftë se ekziston një pikë x në X e tillë që $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x, y\| = 0$ për çdo y në X. Në qoftë se $\{x_n\}$ konvergjon në x, këte e shkruajmë $\{x_n\} \to x$ kur $n \to\infty$.

Përkufizim 1.7. Hapësira kuazi-2-norm $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ quhet **e plotë** në qoftë se çdo varg Koshi është konvergjent në një element të X.

Përkufizim 1.8. Hapësira kuazi-2-norm e plotë quhet **hapësirë kuazi-2-Banach**.

Përkufizim 1.9. Le të jetë X një hapësirë kuazi-2-Banach dhe T një pasqyrim i X në X. T quhet i vazhdueshëm në x në qoftë se për çdo varg $\{x_n\}$ në X, $\{x_n\} \to x$ kur $n \to\infty$ sjell $\{T(x_n)\} \to T(x)$ kur $n \to\infty$

Po japim edhe konceptin e marrë nga Kikina et. al.

Përkufizim 1.10. Bashkësinë e të gjithë funksioneve gjysmë të vazhdueshëm nga sipër me 5 ndryshore $f : R_+^5 \to R$ që plotëson vetitë:

(a) f është jo zbritjes në lidhje me secilën ndryshore,

(b) $f(t,t,t,t,t) \leq t,\ t \in R_+$,

do ta shënojmë me F_5 dhe çdo funksion i tillë do të quhet **F_5-funksion.**

Disa shembuj të F_5-funksionit janë:

1. $f(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) = \max\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$,
2. $f(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) = [\max\{t_1t_2, t_2t_3, t_3t_4, t_4t_5, t_5t_1\}]^{1/2}$,
3. $f(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) = [\max\{t_1^p, t_2^p, t_3^p, t_4^p, t_5^p\}]^{1/p}$, $p > 0$,
4. $f(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) = (a_1t_1^p + a_2t_2^p + a_3t_3^p + a_4t_4^p + a_5t_5^p)^{1/p}$,

ku $p > 0$ dhe $0 \le a_i , \sum_{i=1}^{5} a_i \le 1$,

5. $f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \dfrac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$ ose $f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$ etj.

2. Materiali dhe metoda

Po formulojmë lemën e mëposhtme, të cilën do ta përdorim për vërtetimin e teoremës kryesore.

Lemë 2.1 Le të jetë $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ një hapësirë e kuazi-2-normuar me koeficientë $k \ge 1$ dhe $\{x_n\}$ një varg në *X*. Në qoftë se

$$d(x_n, x_{n+1}) \le c^n l,\ 0 \le c < \tfrac{1}{k} \le 1,\ l \ge 0,\ \ \forall n \in N\ ,$$

atëherë vargu $\{x_n\}$ është varg Cauchy.

Vërtetim:

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_{n+m}, u\| &\le k\|x_n - x_{n+1}, u\| + k\|x_{n+1} - x_{n+m}, u\|) \\
&\le k\|x_n - x_{n+1}, u\| + k^2\|x_{n+1} - x_{n+2}, u\| + k^2\|x_{n+2} - x_{n+m}, u\| \le \ldots \\
&\le k\|x_n - x_{n+1}, u\| + k^2\|x_{n+1} - x_{n+2}, u\| + k^3\|x_{n+2} - x_{n+3}, u\| + \ldots \\
&\quad + k^{m-2}\|x_{n+m-3} - x_{n+m-2}, u\| + k^{m-1}\|x_{n+m-2} - x_{n+m-1}, u\| + \\
&\quad + k^{m-1}\|x_{n+m-1} - x_{n+m}, u\| \\
&\le kc^n l + k^2 c^{n+1} l + k^3 c^{n+2} l + \ldots + k^{m-1} c^{n+m-2} l + k^m c^{n+m-1} l \\
&\le kc^n l \tfrac{1-(kc)^m}{1-kc} \le kc^n l \tfrac{1-(kc)^m}{1-kc} < \tfrac{kc^n l}{1-kc}.
\end{aligned}$$

E kështu që $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+m}, u\| = 0$. Kjo sjell që $\{x_n\}$ është varg Koshi në *X*. Kjo përfundon vërtetimin e lemës.

Teoremë 2.2 Le të jetë *X* një hapësirë e kuazi-2-normuar me koeficientë $k \ge 1$ dhe $f \in \mathrm{F}_5$. Le të jetë $T : X \to X$ që plotëson mosbarazimin:

$$\|T(x) - T(y), u\| \le cf(\|x - y, u\|, \|x - Tx, u\|, \|y - Ty, u\|, \|y - T^2 x, u\|, \|y - Tx, u\|) \quad (1)$$

për çdo $x, y \in X$ dhe $0 \le c < \frac{1}{k} \le 1$. Atëherë *T* ka një pikë fikse të vetme *z* në *X* të tillë që $x_0 \in X$ jep $\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = z$.

Vërtetim. Le të jetë x_0 një pikë e çfarëdoshme në X. Përcaktojmë vargun $\{x_n\}$ si vijon:

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Marrin $u \in X$. Shënojmë me

$$d_n(u) = \|x_n - x_{n+1}, u\|,\ \ n = 0,1,2,\ldots .$$

Nga mosbarazimi (1) marrim:

$$\begin{aligned} d_n(u) &= \|x_n - x_{n+1}, u\| = \|T^n x_0 - T^{n+1} x_0, u\| \\ &\le cf(\|T^{n-1}x_0 - T^n x_0, u\|, \|T^{n-1}x_0 - T^n x_0, u\|, \|T^n x_0 - T^{n+1}x_0, u\|, \\ &\quad \|T^n x_0 - T^{n+1}x_0, u\|, \|T^n x_0 - T^n x_0, u\|) \\ &= cf[d_{n-1}(u), d_{n-1}(u), d_n(u), d_n(u), 0]. \end{aligned}$$

Nga ky mosbarazim dhe nga vetitë e f rrjedh se

$$d_n(u) \le c d_{n-1}(u)$$

Në përgjithësi kemi

$$d_n(u) \le c^n d_0(u) = c^n l, n \in N, \tag{2}$$

ku $l = d_0(u) = \|x_0 - x_1, u\|$, dhe prandaj

$$\lim_{n\to\infty} d_n(u) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}, u\| = 0\ , \tag{3}$$

atëherë, nga (2) dhe **Lema 2.1** rrjedh se vargu $\{x_n\}$ është varg Koshi në X dhe prandaj është konvergjent në X. Le të kemi $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n x_n = \alpha \in X$. Limiti α është i vetëm. Supozojmë se $\alpha' \ne \alpha$ është i barabartë me $\lim_{n\to\infty} x_n$. Atëherë nga kushti ($2\,N_4^{\bullet}$) i **Përkufizimit 1.5**, marrim

$$\|\alpha - \alpha', u\| \le k\|\alpha - x_n, u\| + k\|x_n - \alpha', u\|.$$

Duke çuar n në infinit do të kemi $\|\alpha - \alpha', u\| = 0$ për çdo $u \in X$ dhe kështu që $\alpha = \alpha'$.

Le të vërtetojmë tani që α është pikë fikse e *T*. Supozojmë se $\alpha \ne T\alpha$. Atëherë nga **Përkufizimi 1.3**, marrim

$$\|\alpha - T\alpha, u\| \le k\|\alpha - x_n, u\| + k\|x_n - T\alpha, u\|.$$

Atëherë, në qoftë se $n \to \infty$, kemi

$$\|\alpha - T\alpha, u\| \le k \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n - T\alpha, u\| \ . \tag{4}$$

Nga (1), kemi që

$$\|x_n - T\alpha, u\| = \|Tx_{n-1} - T\alpha, u\|$$
$$\le cf(\|x_{n-1} - \alpha, u\|, \|x_{n-1} - Tx_{n-1}, u\|, \|\alpha - T\alpha, u\|, \|\alpha - T^2 x_{n-1}, u\|, \|\alpha - Tx_{n-1}, u\|)$$
$$= cf(\|x_{n-1} - \alpha, u\|, \|x_{n-1} - x_n, u\|, \|\alpha - T\alpha, u\|, \|\alpha - x_{n+1}, u\|, \|\alpha - x_n, u\|) \ .$$

Duke çuar n në infinit do të kemi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n - T\alpha, u\| \le cf(0, 0, \|\alpha - T\alpha, u\|, 0, 0) \le c\|\alpha - T\alpha, u\| . \tag{5}$$

Nga (4) dhe (5), kemi

$$\|\alpha - T\alpha, u\| \le k \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n - T\alpha, u\| \le k\, c \|\alpha - T\alpha, u\| .$$

Meqë $0 < c < \frac{1}{k} < 1$ kemi $\|\alpha - T\alpha, u\| = 0$ për çdo $u \in X$. Prandaj α është pikë fikse e *T*.

Le të vërtetojmë tani unicitetitin. Supozojmë se $\alpha' \ne \alpha$ është gjithashtu një pikë fikse e T . Nga (1) për $x = \alpha$ dhe $y = \alpha'$ marrim:

$$\|\alpha - \alpha', u\| = \|T(\alpha) - T(\alpha'), u\|$$
$$\le cf(\|\alpha - \alpha', u\|, \|\alpha - T\alpha, u\|, \|\alpha' - T\alpha', u\|, \|\alpha' - T^2\alpha, u\|, \|\alpha' - T\alpha, u\|) \cdot$$
$$= cf(\|\alpha - \alpha', u\|, 0, 0, \|\alpha' - \alpha, u\|, \|\alpha' - \alpha, u\|) \le c\|\alpha - \alpha', u\| .$$

Dhe këtu, kemi që

$$\|\alpha - \alpha', u\| \le c\|\alpha - \alpha', u\| . \tag{6}$$

Nga (6) del se: $\|\alpha - \alpha', u\|$=0. Pra, kemi përsëri që $\alpha = \alpha'$. Kjo përfundon vërtetimin e teoremës.

Rezultatet dhe diskutime

Për shprehje të ndryshme të f në **Teoremën 2.2** marrim teorema të ndryshme. Në rastin kur $f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = t_1$ kemi një shtrirje të parimit Banach të kontraksionit për hapësirën metrike në hapësirën kuazi-2-Banach:

Rrjedhim 3.1 Le të jetë $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ një hapësirë kuazi-2-Banach me koeficient $k \ge 1$ dhe $T : X \to X$ një pasqyrimi i tillë që

$$\|Tx - Ty, u\| \leq c\|x - y, u\|$$

për çdo $x, y \in X$, ku $0 \leq c < \frac{1}{k}$. Atëherë T ka një pikë fikse të vetme α në X të tillë që $x_0 \in X$ jep $\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \alpha$.

Në rastin kur $f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \frac{t_2 + t_3}{2}$ kemi një shtrirje të parimit Kannan të kontraksionit për hapësirën metrike (Kannan, 1969) në hapësirën kuazi-2-Banach:

Rrjedhim 3.2 Le të jetë $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ një hapësirë kuazi-2-Banach me koeficient $k \geq 1$ dhe $T : X \to X$ një pasqyrimi i tillë që

$$\|Tx - Ty, u\| \leq c(\|x - Tx, u\| + \|y - Ty, u\|)$$

për çdo $x, y \in X$, ku $0 \leq c < \frac{1}{2k}$. Atëherë T ka një pikë fikse të vetme α në X të tillë që $x_0 \in X$ jep $\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \alpha$.

Rrjedhim 3.3 Për $f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \max\{t_2, t_3\}$ kemi një shtrirje të parimit Bianchini kontraksionit për hapësirën metrike (Bianchini, 1972) në hapësirën kuazi-2-Banach.

Rrjedhim 3.4 Për $f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \frac{at_1 + bt_2 + ct_3}{a + b + c}$ ku *a*, *b*, *c* janë numra jonegativë të tillë që $a + b + c < 1$, kemi një shtrirje të parimit Reich të kontraksionit për hapësirën metrike (Park, 2006) në hapësirën kuazi-2-Banach.

Shënim 1: Për *f* të ndryshme mund të marrim shumë rezultate të tjera të ngjashme të klasifikimit Rhoades (Reich, 1971).

Shënim 2: Për $k = 1$ marrim Teoremën tonë kryesore dhe rrjedhimet e saj për hapësirat 2-Banach.

Literatura

Açikgoz, M. (2007): A review on 2-normed structures, Int. Journal of Math. Analysis, 1 (4), 187 - 191

Badshah, V.H. and Gupta, O.P. (2005): Fixed point theorems in Banach and 2-Banach spaces, Jnanabha, 35, 73-78

Bianchini, R. M. T. (1972): Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi, Boll. Un. Mat. Ital., 5, 103-108

Gahler, S. (1965): Lineare 2-normierte raume, Diese Nachr, vol. 28,no.1-2, 1–43

Gangopadhyay, M., Saha, M., and Baisnab, A.P. (2009): Fixed point theorems for a class of mappings in a hapësirë 2-Banach, Int. Journal of Math. Analysis, 3 (27), 1339 - 1347

Gangopadhyay, M., Saha, M., and Baisnab, A.P. (2012) Caristi-tip fixed point theorems in a 2- Banach spaces, Gen. Math. Notes, 8(1), 1-5

Iseki, K. (1975): Fixed point theorems in 2-metric spaces, Math, Seminar Notes, Kobe Univ., 3, 133-136

Iseki, K. (1976): Fixed point theorems in Banach spaces, Maths Seminar Notes, Kobe Univ., 2, 11-13

Kannan, R. (1969): Some results on fixed points II, Amer. Math. Monthly, 76, 405-408

Khan, M. S. and Khan, M., D. (1993): Involutions with fixed points in 2-Banach spaces, Internat. J. Math. & Math. Sci., 16(3), 429-434

Kikina, L., Kikina, K., and Vardhami, I., Fixed point theorems for almost contractions in generalized metric spaces, Creative Mathematics and Informatics, Accepted to appear

Park, C. (2006): “Generalized quasi-Banach spaces and quasi-(2, p)-normed spaces,” Journal of the Chungcheong Matematical Society, 19 (2)

Reich, S. (1971): Some remarks concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull., 14, 121-124

Rhoades, B. E. (1977): A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 226, 256-290

Sharma, P.L. and Sharma, B.K. (1979): Non-contraction type mappings in 2-Banach spaces, Nanta Math., 12 (1), 91-93

White, A. G. (1969): 2-Banach spaces, Math.Nachr., 42, 43 - 60