MBI PARASHIKIMIN E INTERVALEVE TË OSHILACIONIT NË ZGJIDHJET E EKUACIONEVE DIFERENCIALE LINEARE TË RENDIT TË DYTË

ELISABETA PETI (KOÇI)[1], KLAUDIO PEQINI[2], DRILONA SAULI[3]

[1]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

[2]Universiteti i Tiranës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Fizikës

[3]Universiteti Politeknik i Tiranës, Fakulteti i Gjeologjisë & Minierave, Departamenti i Burimeve të Energjisë

e-mail: *elisabeta.koci@fshn.edu.al*

Përmbajtja

Teoria e Oshilacionit një nga objektivat kryesore të saj ka edhe "zbulimin" e intervaleve në të cilat zgjidhjet e një ekuacioni janë oshiluese. Në këtë punim qëllimi ynë kryesor është evidentimi i një metode, që edhe pse nuk lidhet me metodat tradicionale për nxjerrjen e kritereve të kësaj teorie, na lejon të zbulojmë intervalet e sjelljes oshilatore në zgjidhjet e ekuacioneve diferenciale të zakonshme lineare homogjene të rendit të dytë. Kjo metodë operon me koeficientët variabël të tyre. Përdorimi i metodës varet së pari nga aftësia për të transformuar një ekuacion të caktuar diferencial në formën e tij kanonike më të thjeshtë të mundshme, pra për ekzekutimin e këtij programi duhet të kalojmë në disa etapa që përfshijnë domosdoshmërisht transformimet e një ose dy variablave përpara se të zbatohet metoda. Ideja e saj është zbulimi i oshilacioneve (lëkundjeve) të zgjidhjeve pikërisht aty ku ato mund të ndodhin, qofshin këto intervale të fundme apo të pafundme të ndryshores së pavarur. Kjo metodë për zbulimin e intervaleve të oshilacionit do të aplikohet për disa ekuacione të fizikës matematike, si ekuacioni i Besselit dhe ekuacioni Cauchy-Euler që e kanë pikën $x = 0$ *pikë të posaçme*.

Fjalë kyçe: Zgjidhje oshiluese; interval oshilimi; transformim variabli; ekuacion Bessel; ekuacion Cauchy-Euler.

Abstract

One of the main objectives of Oscillation Theory is to determine the intervals for a given independent variable in which the solutions of a differential equation with respect to this variable are oscillatory. There are several traditional methods applied in Oscillation Theory that allow for the discovery of such intervals. In this paper we present a method, being substantially different from the traditional methods, which allow the discovery of the intervals of oscillatory behavior in solutions of ordinary homogeneous linear differential equations of the second order. Fundamentally this method operates with the variable coefficients of such equations. This method has several stages that involve several transformations of the independent variable. The crucial stage requires the transformation of a given differential equation into its simplest canonical form. From this form one can then detect the intervals of oscillatory solutions. The method can detect finite or infinite intervals of the independent variable. This method is applied to the Bessel equation and Cauchy-Euler equation, which have the special point at $x = 0$. Also, the application of the method is demonstrated for other differential equations important in Mathematics and Physics.

Key words: Oscillating solutions; oscillation interval; transformation variables; Bessel equation; Cauchy-Euler equation.

Hyrje

Siç dihet zgjidhjet e shumë ekuacioneve diferenciale lineare, që nuk shprehen me anë të funksioneve elementare, konsiderohen si funksione jo elementare speciale. Vetitë e tyre mund të studiohen më imtësisht në kuadrin e ekuacionit përkatës diferencial. Për këto funksione speciale mund të nxirren shumë relacione që i lidhin me njëri-tjetrin, zbërthime të tyre në seri apo produkte të pafundme (Nico & Temme, 1996). Zakonisht ata llogariten në vlera të përafërta (me saktësinë e dëshiruar). Këta funksione quhen po aq të njohur ndër matematikanë sa edhe funksionet elementare madje ndeshen shumë më shpesh se ato në zgjidhjet sidomos të ekuacioneve me derivate të pjesshme që modelojnë më së shumti probleme të shkencës dhe teknikës.

Ekuacionet diferenciale lineare me koeficientë variabël, të trajtës:

$$L(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \qquad (E)$$

ku $p_0(x), p_1(x) \ldots p_{n-1}(x)$ janë funksione të vazhdueshme në një interval të dhënë (a, b), shndërrohen në ekuacione po lineare por tashmë me koeficientë konstantë me anën e një teknike të zëvendësimit të ndryshores si në vijim,

$$t = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \int [p_0(x)]^{\frac{1}{n}} dx.$$

Kalimi nga një ekuacion linear me koeficientë variabël (ELKV) në një ekuacion linear me koeficientë konstantë (ELKK) automatikisht zgjidh problemin e parë (ELKV), sepse problemi i integrimit të këtij të fundit, pra (ELKK) është i zgjidhur tashmë përfundimisht. Në shumë probleme të fizikës, mekanikës, astronomisë dhe veçanërisht të fizikës matematike, ndeshemi me ekuacione diferenciale lineare të rendit të dytë me koeficientë variabël. Integrimi i disa trajtave të veçanta të këtij ekuacioni tashmë është i njohur në çdo kurs të ekuacioneve diferenciale të zakonshme, por për fat të keq në rastin e përgjithshëm integrimi i një ekuacioni të tillë (edhe pse në dukje i thjeshtë) është një problem mjaft i vështirë.

Por, jo domosdoshmërisht në një problem (modelim i një situate reale) kërkohet zgjidhja e përgjithshme e këtyre ekuacioneve, shpesh kërkohen zgjidhje që plotësojnë disa kushte apo veti të caktuara. Ndaj edhe qëllimi ynë në këtë punim nuk është zgjidhja e tyre, por një analizë mbi intervalet ku këto zgjidhje shfaqin veti oshilatore, veti të cilat shpesh ngjallin interes tek studiues të fushave të shkencave teknike dhe shkencore. Për këtë arsye, vendosëm të hetojmë një pyetje në dukje të thjeshtë në lidhje me teorinë e zgjidhjeve oshilatore të ekuacioneve të zakonshme diferenciale të rendit të dytë lineare homogjene me koeficientë variabël.

Metodologjia

Le të jetë dhënë ekuacioni linear homogjen me koeficientë konstantë në formën:

$$L(y) = y'' + By' + Cy = 0, \qquad (1)$$

ku funksioni y dhe derivatet e tij janë dhënë në lidhje me ndryshoren e pavarur x; B dhe C janë koeficientë konstantë. Ky ekuacion i ka të gjitha zgjidhjet oshilatore nëse ekuacioni i tij karakteristik, $\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ nuk ka rrënjë reale, pra vetëm nëse dallori $D = B^2 - 4C < 0$, gjë që sjell automatikisht, $C > 0$. Prania në zgjidhjen e përgjithshme e funksioneve trigonometrike sin dhe cos e konfirmojnë këtë rezultat të mirënjohur në fushën e oshilacionit. Le të vazhdojmë analizën tonë duke shtruar pyetjen, a vlen i njëjti "kriter-dallor" si parashikues i sjelljes oshiluese të zgjidhjeve edhe në rastet kur koeficientët e ekuacionit nuk janë konstantë por janë funksione të *x*-it si në ekuacionin (E) (rasti $n = 2$). Nuk janë të paktë shembujt konkretë nga fizika (vëzhgimet eksperimentale) apo rastet ku kriteret e mirënjohura të teorisë së oshilacionit tregojnë që ky kriter i dallorit dështon. Po cila është arsyeja e këtij dështimi? Le ta shohim në vijim këtë kriter në rastin e përgjithshëm të ekuacioneve të formës:

$$y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0. \qquad (2)$$

Interesi ynë në këtë punim përqëndrohet në shpresën intuitive se "funksioni dallor" i ekuacionit (2) korrespondues i dallorit të ekuacionit (1); $d(x) \equiv b^2(x) - 4c(x)$, mund të mbart ndonjë informacion në lidhje me natyrën e zgjidhjeve të ekuacionit (2). Analiza jonë nuk është e re, pasi shumë nga hetimet klasike të së kaluarës mbi oshilacionin e ekuacioneve diferenciale të rendit të dytë, lidhen me konceptin e "dallorit", duke filluar nga punimet klasike të *Shturmit*. Këtë teknikë të përdorur edhe nga Christodoulou *et.al*, 2016, që bën bashkë elementin matematikor të trajtës kanonike dhe konceptet fizike mbi oshilatorin na tërhoqën vëmendjen për t'u thelluar dhe për të parë në një këndvështrim tjetër studimin tonë mbi kriteret apo intervalet e oshilacionit. Ndaj analiza jonë fillon me transformimin e ekuacioneve (1) dhe (2) në trajtat kanonike korresponduese të tyre, pra në ato trajta në të cilat mungon derivati i parë. Ekuacioni (1) me anë të pozimit

$$y(x) = z(x)\, exp\left(-\frac{1}{2}Bx\right),$$

transformohet në trajtën e tij kanonike,

$$z'' + Qz = 0. \tag{3}$$

Sigurisht që dallorët e ekuacioneve (1) dhe (3) duke qenë të barabartë na lejojnë të përcaktojmë lehtësisht koeficientin konstant të vetëm Q për ekuacionin kanonik (3),

$$Q = -\frac{D}{4} = C - \frac{B^2}{4}\,. \tag{4}$$

Ekuacioni (2) ngelet po linear homogjen me anë të zëvendësimit të funksionit të panjohur y sipas relacionit $y(x) = \alpha(x)z(x)$. Në ekuacionin e transformuar koeficienti pranë z' është

$$2\alpha'(x) + b(x)\alpha(x).$$

Që ky term të mungojë në ekuacionin e ri të transformuar, pra që të mungojë derivati i rendit të parë mjafton që ta zgjedhim $\alpha(x)$ të tillë që

$$2\alpha'(x) + b(x)\alpha(x) = 0.$$

Pra, me anë të zëvendësimit të mëposhtëm

$$y(x) = z(x)\, exp\left(-\frac{1}{2}\int b(x)\, dx\right),$$

ekuacioni (2) transformohet në trajtën e tij kanonike

$$z'' + q(x)z = 0. \tag{5}$$

Në këtë rast, me të njëjtin arsyetim si më sipër përcaktojmë koeficientin funksional të vetëm $q(x)$ për ekuacionin kanonik (5),

$$q(x) = -\frac{1}{4}[d(x)] - \frac{b'(x)}{2} = c(x) - \frac{b^2(x)}{4} - \frac{b'(x)}{2}\,. \tag{6}$$

Një krahasim empirik midis dy formave kanonike (3) dhe (5) zbulon pse vetitë e mirënjohura nga fizika për oshilatorët harmonikë të thjeshtë me faktor shuarës B, (modeluar matematikisht nga ekuacionet (1) dhe (3)) nuk janë po ato edhe në rastin e ekuacioneve me koeficientë variabël (ekuacionet (2) dhe (5)): Transformimi i parë në formën kanonike ((1) tek (3)) "e kalon" në mënyrë të efektshme koeficientin e shuarjes B në termin e ri konstant Q, ku termi negativ $-\frac{B^2}{4}$ kundërshton qartë termin e mirënjohur (sidomos në modelimet nga fizika) oshilues $C > 0$ të ekuacionit (1). Nga ana tjetër, transformimi i dytë në formën kanonike ((2) tek (5)) “e kalon” në $q(x)$ edhe termin që përmban derivatin e parë, $-\frac{b'(x)}{2}$, përveç termit negativ të pastër shuarës $-\frac{b^2(x)}{4}$. Termi derivativ $-\frac{b'(x)}{2}$ ndonjëherë vepron si shuarës oshilacionesh, kur $b'(x) > 0$, ndërsa herë të tjera vepron si nxitës oshilacionesh sepse rrit termin oshilues të natyrshëm $c(x) > 0$ kur $b'(x) < 0$. Pra qartazi nga kjo analizë me nuanca arsyetimi edhe të fizikës klasike (oshilatorët), konkludojmë se për ekuacionin tonë nën shqyrtim (2), funksioni $b(x)$ nuk përfaqëson koeficientin e shuarjes së pastër si në rastin e koeficientit konstant B (koeficient para derivatit të parë). Kjo është edhe arsyeja pse në shumë raste forma kanonike është treguar e pamjaftueshme në parashikimin matematikor të sjelljes oshilatore të zgjidhjeve të ekuacionit (2) pasi që shndërrimi në këtë formë nuk “kalon” vetëm një term të pastër shuarës në koeficientin $q(x)$ të ekuacionit (5), por shpesh herë dy të tillë. Është mjaft e qartë se kjo vështirësi që evidentuam më sipër me termin $-\frac{b'(x)}{2}$ nuk ekziston në rastet kur koeficienti përpara derivatit të parë, pra $b(x)$ është konstante sepse $b'(x) \equiv 0$ dhe koeficienti kanonik $q(x)$ në këtë rast të veçantë nuk është “i ndikuar” nga termi “problematik” $-\frac{b'(x)}{2}$. Ky vëzhgim na tregon se si në metodën tonë që do t’i japim trajtën e një algoritmi, mund të anashkalojmë vështirësitë që lidhen me koeficientin $b'(x)$.

Pra, fillimisht ekuacionet e formës (2) duhet të sillen në formën e tyre kanonike pa derivat të parë, dhe më pas kjo formë duhet të transformohet në një formë të re në të cilën koeficienti para derivatit të parë të jetë konstant. Si rezultat i kësaj procedure: çdo tendencë oshilatore nuk do të ketë ndërhyrje nga derivativi $b'(x)$, që tashmë është zero. Konkurrenca midis lëkundjes (përfaqësuar në model nga koefiçienti $c(x)$) dhe shuarjes së saj (përfaqësuar në model nga koeficienti $\frac{b^2}{4}$) në atë term të ri $q(x)$, pra $q(x) = c(x) - \frac{b^2}{4}$, tashmë është e drejtë, “pa ndikime nga jashtë”.

Arsyetimi i mësipërm na sugjeron se mund të gjendet një kriter për zgjidhjet oshilatore duke përdorur tashmë atë si formë kanonike përfundimtare të ekuacionit (2) dhe teoremën klasike të krahasimit të Shturm-it. Analiza e kësaj procedure, e cila do të ndiqet në seksionin e mëposhtëm, do të konsistoj në ndjekjen e dy rrugëve për të arritur në rezultatin që kërkojmë, pra dy transformimet e mundshme, atë të variablit të varur y dhe të pavarur x. Ekuacioni Cauchy-Euler që do të marrim në studim do të na ndihmoj për të krijuar një ide se cilin nga këto transformime duhet të zgjedhim që të na lejojë të krijojmë një algoritëm për nxjerrjen e një kriteri për zgjidhjet oshilatore të ekuacionit (5).

1- Ekuacione të fizikës matematike nën teorinë e Shturm-Liuvilit

Në shumë probleme të matematikës së aplikuar, fizikës, astronomisë, mekanikës, inxhinierisë dhe veçanërisht të fizikës matematike ndeshemi me nevojën e modelimit të tyre në ekuacione diferenciale të rendit të dytë me koeficient jokonstant pra variabël. Me ndihmën e teorisë analitike të ekuacioneve diferenciale, ndërmjet të tjerash trajtohen edhe disa nga funksionet speciale më të rëndësishëm dhe më të përdorshëm, që na ndihmojnë në zgjidhjet e ekuacioneve diferenciale të rendit të dytë. Në kaosin e formulave të shumta, relacioneve që i lidhin ato shpesh me njëra tjetrën të zbuluara dhe studiuara ndër vite, vihet re një trajtim i ri që përpiqet të vendos njëfarë rregulli. Këto funksione tashmë shihen edhe nga një pikëpamje e përbashkët mbi bazën e teorisë së grupeve. Ky trajtim megjithëse nuk është objekt i këtij punimi dhe teoria klasike e Shturm-Liuvilit, na lejojnë të marrim në konsideratë disa përfundime mbi disa ekuacione të njohura, që lidhen me operatorët e vetë-konjuguar, pasi dimë që çdo ekuacioni linear homogjen të rendit të dytë i korespondon një formë e vetë e konjuguar.

Teoria e oshilacionit, mbështetet pikërisht në këtë element, sepse pasi ndërtojmë mbi këtë formë, problemin korespondues me vlera të veta, këtij të fundit i shoqërohet një operator diferencial linear i vetë-konjuguar. Pra, çdo ekuacioni linear homogjen të rendit të dytë i korespondon një operator diferencial linear i vetë-konjuguar.

Le të rendisim më poshtë disa nga ekuacionet diferenciale më të njohura të rendit të dytë (trajtat e thjeshta) dhe format e vetë-konjuguara të tyre koresponduese. Të gjithë këto ekuacione mund të ndryshojnë në formë në anën e majtë të tyre duke shumëzuar të dyja anët e ekuacionit me një faktor integrues të përshtatshëm (edhe pse e njëjta gjë nuk është e vërtetë për ekuacionet diferenciale me derivate të pjesshme të rendit dytë).

<u>Ekuacioni i Cauchy-Euler</u>

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{C}{x^2}y = 0$$

mund të shkruhet në formën e Shturm-Liuvilit

$$(xy')' + \left({}^{C}\!/_{x}\right)y = 0.$$

<u>Ekuacioni i Besselit</u>

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - v^2)y = 0,$$

mund të shkruhet në formën e Shturm-Liuvilit

$$(xy')' + \left(\lambda^2 x - {}^{v^2}\!/_{x}\right) y = 0.$$

<u>*Ekuacioni i Lezhandrit*</u>

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + v(v+1)y = 0,$$

mund të shkruhet në formën e Shturm-Liuvilit

$$[(1 - x^2)y']' + v(v+1)y = 0.$$

<u>*Ekuacioni diferencial i Çebishevit* (*Chebyshev*)</u>

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0.$$

Forma e vetë–konjuguar të ekuacionit diferencial të Çebishevit,

$$\left[(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} y'\right]' + \lambda(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, y(x) = 0.$$

Ekzistenca e vlerave vetjake dhe funksioneve të vlerave vetjake në këto forma lidhen me procesin oshilator. Rastet e ekuacioneve të mësipërme tregojnë se hapi i parë në vendosjen e një kriteri për zgjidhjet oshiluese duhet të jetë një përpjekje për të transformuar një ekuacion të formës (5) në një formë tjetër në të cilën të gjithë koeficientët janë konstante. Dihet se kjo mund të realizohet me transformim ose të variabit të varur ose të atij të pavarur.

Në vijim do të provojmë të ndjekim të dyja rrugët e transformimeve. Analiza jonë hap pas hapi do të mbështetet edhe në interpretimin fizik të oshilatorit harmonik. Ekuacioni më i thjeshtë ndër ekuacionet e mësipërme është ai i *Cauchy-Euler*, ai është një përfaqësues tipik i atyre ekuacioneve diferenciale që mund të shndërrohen në një oshilator harmonik shuarës me koeficientë të gjithë konstantë. Por për shumë nga ekuacionet nën studim ky shndërrim nuk është i mundur, ndaj kur ky hap nuk realizohet duhet të mjaftohemi me bërjen konstante të koeficientit shuarës para derivatit të parë. Situatën e kemi në favor të metodës sonë vetëm kur të arrijmë që këtë koeficient shuarës konstant ta shfaqim (pa e eleminuar) në koeficientin përpara derivatit zero në formën përfundimtare kanonike. Ky është dhe momenti i përdorimit të kriterit të Shturmit për zgjidhjet oshilatore.

2-Transformimet e variablave

Dihet se lineariteti i ekuacionit nuk ndryshon pas çdo shndërrimi linear të variablit të varur apo çdo shndërrimi të variablit të pavarur. Në vijim le të shndërrojmë të dy variablat me anë të disa relacioneve të njohura.

2.1 *Transformimi i variablit të varur z(x)*

Le të kryejmë zëvendësimin e funksionit të panjohur $z(x)$ sipas relacionit $z(x) = u(x)v(x)$ në ekuacionin (5)

$$u'' + \frac{2v'}{v}u' + \left[\frac{v''}{v} + q(x)\right]u = 0. \quad (7)$$

Meqë kërkojmë që koeficienti para funksionit derivat u' duhet të jetë konstant (le të themi c) atëherë:

$$\frac{2v'}{v} = c \rightarrow \frac{dv}{v} = \left(\frac{c}{2}\right)dx,$$

pra, $v(x) = exp\left(\frac{c}{2}x\right)$. Ekuacioni (7) merr formën:

$$u'' + cu' + \left[\frac{c^2}{4} + q(x)\right]u = 0, \quad (8)$$

dhe forma e re kanonike e ekuacionit (8) supozohet të jetë e trajtës,

$$u'' + \hat{q}(x)u = 0.$$

Qartësisht shohim tani se koeficienti konstant i shuarjes c i termit u' nuk mund të shfaqet në koeficientin $\hat{q}(x)$ të formës së fundit kanonike të ekuacionit (8). Konstantja c “bie” nga dallori $d(x)$ i ekuacionit (8):

$$d(x) = c^2 - 4\left[\frac{c^2}{4} + q(x)\right] = -4q(x), \quad (9)$$

dhe $\hat{q}(x)$ kthehet në origjinalin $q(x)$ sepse

$$\hat{q}(x) = \frac{-d(x)}{4} = q(x). \quad (10)$$

Ky përfundim tregon se algoritmi ynë nuk mund të funksionoj me anë të një transformimi të funksionit të varur $z(x)$ në ekuacionin (5), ndaj le të ndjekim rrugën e dytë, atë të transformimeve të ndryshores së pavarur x.

2.2 *Transformimi i variablit të pavarur x*

Zëvendësimi i ndryshores x me anë të relacionit $x = \varphi(t)$ në ekuacionin (5) na jep ekuacionin

$$z'' - \frac{\varphi''}{\varphi'}z' + (\varphi')^2 q(\varphi(t))z = 0, \quad (11)$$

ku derivatet janë në lidhje me variablin e ri, t. Në këtë ekuacion, ne mund të zgjedhim funksionin $\varphi(t)$ me kërkesën që koeficienti përpara z' duhet të jetë konstante (le të themi c). Zgjidhja e ekuacionit diferencial $\varphi'' + c\varphi' = 0$, me metodën e mirënjohur të uljes së rendit na krijon mundësinë të përzgjedhim ndër transformime të trajtave: $\varphi(t) = c_1 + c_2\, exp(ct)$, ku c_1 dhe c_2 janë konstante arbitrare. Ekuacioni (11) mund të shkruhet si vijon,

$$z'' - cz' + c^2(x - c_1)^2 q(x)\, z = 0. \tag{12}$$

Vëmë re se konstantja c_2, nuk shfaqet në këtë ekuacion. Le të ndërtojmë formën kanonike të ekuacionit (12) me ndihmën e transformimit,

$$z(x) = w(t)\, exp\, \left(\frac{1}{2}\, cx\right).$$

Forma e kanonike ekuacionit (12) do të jetë:

$$w'' + \hat{q}(x)w = 0 \tag{13}$$

ku:

$$\hat{q}(x) = c^2\left[(x - c_1)^2 q(x) - \frac{1}{4}\right]. \tag{14}$$

Ndryshe nga transformimi i variablit të varur, transformimi i variablit të pavarur që kemi tani nën studim lejon futjen në ekuacionet (12) dhe (14) të dy konstanteve arbitrare c dhe c_1. Konstantja pozitive c^2 vepron si një faktor proporcionaliteti në koeficientin $\hat{q}(x)$ të formës kanonike, nuk eleminohet si në transformimin e variablit të varur. Konstantja c_1 përfaqëson një zhvendosje "horizontale" të variablit të pavarur x. Pra, me një zgjedhje të përshtatshme të konstantes c_1, termi i zhvendosur $(x - c_1)^2$ në ekuacionin (14) është në gjendje të "eliminojë" çdo pikë të rregullt singulare që mund të përmbajë termi i dhënë origjinal $q(x)$. Për më tepër, në këtë rast koeficienti $\hat{q}(x)$ ngelet të jetë konstante, madje ekuacionet (12) dhe (13) përfundojnë të kenë koeficientë konstantë vetëm në rastet kur $q(x)$ përmban saktësisht vetëm një pikë të rregullt singulare në $x = c_1$, pra kur

$$q(x) = \frac{k}{(x - c_1)^2}. \tag{15}$$

Ky është rasti i ekuacionit të tipit Cauchy-Euler, sepse në raste të tjera, koeficienti përpara $z(t)$ në ekuacionin (12) nuk është e thënë të jetë konstant.

3-Kriteri i krahasimit të Shturmit për zgjidhjet oshiluese

Në fillim të këtij paragrafi, po veçojmë një nga teoremat më të njohura të teorisë së Shturm-Liuvilit, teoremën e tretë krahasuese të Shturmit.

Teorema 3.1. Le të jenë dhënë ekuacionet diferenciale:

$$u''(x) + f(x)u = 0 \tag{E_1}$$

$$u''(x) + g(x)u = 0 \tag{E_2}$$

ku për çdo $x \in \mathrm{I} \subseteq \mathcal{R}$ ka vend mosbarazimi $f(x) > g(x)$. Le të jetë φ një zgjidhje e (E_1) dhe ψ një zgjidhje e (E_2) atëherë ndërmjet dy zerove të njëpasnjëshme të ψ-së ka të paktën një zero të φ-së.

Ekuacionet diferenciale që ne studiojmë mund të transformohen të gjitha në formën kanonike (5), dhe kjo formë mund të riformulohet gjithmonë në formën (12) me koeficientin shuarës konstant, mjafton që $\varphi(t) = c_1 + c_2\, exp(ct)$, por në përgjithësi, koeficienti përpara $z(t)$ nuk do të jetë konstant. Për ekuacione të tilla, ende mund të gjejmë një mënyrë për të mos e eleminuar konstanten shuarëse c në koeficientin $\hat{q}(x)$ të formës kanonike (13). Kjo konstante do të përpiqet "haptazi" të kundërshtojë tendencat e brendshme oshiluese të sistemit të modeluar matematikisht nga ekuacioni nën studim. Ndaj me studimin e kësaj tendece apo konkurrence ndërmjet shuarjes dhe lëkundjes do të lidhet edhe ndërtimi i kriterit të oshilacionit. Ekuacionet (13) dhe (14) rezultojnë në formën kanonike përfundimtare, pra

$$w''(x) + c^2\left[(x - c_1)^2 q(x) - \frac{1}{4}\right]w = 0. \tag{16}$$

Në ekuacionin (16) tashmë mund të përdorim një kriter të njohur krahasimi për zgjidhjet oshiluese pavarësisht se koeficienti përpara $w(t)$ varet nga $x(t)$. Teorema e krahasimit e Shturmit realizon një "krahasim" të ekuacionit (16) me ekuacionin e oshilatorit të thjeshtë harmonik,

$$y'' + \varepsilon^2 y = 0. \tag{17}$$

kur konstantja ε tenton drejt zeros.

Pra, nga teorema 3.1 marrim se zgjidhjet oshiluese ndodhin në ekuacionin (16) (dhe për rrjedhojë edhe në ekuacionin (5)) kur $(x - c_1)^2 q(x) - \frac{1}{4} > \varepsilon^2 \to 0$, pra në intervalin ku x-et kënaqin mosbarazimin vijues:

$$q(x) > \frac{1}{4(x - c_1)^2}. \tag{18}$$

Siç dihet ky kriter siguron 'rrotull ε' një kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm për oshilacionet në zgjidhjet e ekuacionit (5) (Agarwal *et al*, 2000, 2002). Në këtë analizë, një element befasues është prania e konstantes arbitrare c_1. Kjo konstante ishte e dobishme në eliminimin e singulariteteve të rregullta nga koeficienti i ekuacionit (16), në këtë rast kërkimi i zgjidhjeve oshiluese shmang çdo pol (gjë që do na krijonte probleme në teknikën tonë) që mund të përfshihet në termin $q(x)$ të një ekuacioni të dhënë në formën kanonike (5). Për shumë ekuacione të matematikës së aplikuar, singularitetet në koeficientët e tyre ndodhin në $x = 0$, ndaj është e përligjur që në këtë rast të përcaktojmë arbitrarisht konstanten $c_1 = 0$, dhe kriteri (18) merr formën:

$$q(x) > \frac{1}{4x^2}. \tag{19}$$

Vlefshmëria e këtij kriteri për zgjidhjet oshiluese do të kontrollohet në seksionin e mëposhtëm për një trajtë të përgjithshme të ekuacionit të Besselit me veti të njohura oshilatore.

4- Intervale oshilimi për zgjidhje të ekuacionit Bessel dhe Cauchy-Euler

Ekuacioni i Besselit i rendit γ, i cili takohet në shumë probleme të fizikës matematike dhe jo vetëm, e ndeshim shpesh në trajtën:

$$t^2y'' + ty' + (k^2t^2 - \gamma^2)y = 0,$$

ku k, γ janë konstante. Konstantja k duhet të jetë e ndryshme nga zero.

Pas zëvendësimit $x = kt$, ekuacioni merr trajtën e mëposhtme klasike të ekuacionit Bessel të rendit γ,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \gamma^2)y = 0.$$

Forma kanonike e ekuacionit diferencial të Besselit është si më poshtë,

$$y'' + \left(1 + \frac{1 - 4\gamma^2}{4x^2}\right)y = 0. \tag{20}$$

Dihet se nga aplikimi i teoremave të krahasimit dhe të ndarjes së Shturm-it që zgjidhjet (funksionet *Bessel*) oshilojnë për të gjithë x-et që plotësojnë kushtin, $|x| > |\gamma|$ (Temme, 1996).

Të njëjtin rezultat e marrim nëse përdorim kriterin e mësipërm (19), që çon në mosbarazimin:

$$q(x) = \left(1 + \frac{1 - 4\gamma^2}{4x^2}\right) > \frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow \gamma^2 < x^2 \Leftrightarrow |\gamma| < |x|.$$

Ndër trajtat më të thjeshta të ekuacioneve diferenciale lineare të rendit të dytë me koeficient variabël, është edhe ekuacioni i *Cauchy-Euler*-it.

Trajta e tij, është si vijon:

$$y'' + \frac{B}{x}y' + \frac{C}{x^2}y = 0 \tag{21}$$

ku B dhe C janë konstante. Duke aplikuar në ekuacionin (21) transformimin e Euler-it

$$x = exp(t), \tag{22}$$

ky ekuacion merr formën e një oshilatori harmonik shuarës me koeficientë konstante

$$y'' + (1 - B)y' + Cy = 0. \tag{23}$$

Funksionet y dhe derivatet e saj tashmë janë në lidhje me variablin e ri të pavarur t. Zgjidhjet oshiluese shfaqen kur dallori $D = (1 - B)^2 - 4C < 0$. Ky përfundim është i mirënjohur nga teoria e ekuacioneve diferenciale të rendit të dytë me koeficientë konstantë. Ky rezultat, $C > \frac{(1-B)^2}{4}$, mund të merret gjithashtu edhe me teknikën e transformimit të ekuacionit në formën e tij kanonike dhe më pas duke zbatuar teoremën e krahasimit të Shturmit.

Në ekuacionin (21) me anën e zëvendësimit

$$y(x) = z(x)\,exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\frac{B}{x}\right)dx\right)$$

domethënë

$$y(x) = z(x)\,x^{-\frac{1}{2}B}$$

marrim ekuacionin në formën e tij kanonike

$$z'' + \frac{1}{x^2}\left(C + \frac{B}{2} - \frac{1}{4}B^2\right)z = 0. \tag{24}$$

Nga teorema e krahasimit të Shturmit, pra nga (18) kemi

$$\frac{1}{x^2}\left(C + \frac{B}{2} - \frac{1}{4}B^2\right) > \frac{1}{4x^2}$$

domethënë

$$C > \frac{(1 - B)^2}{4}.$$

Zbatimi i kritereve të oshilacionit për këto dy ekuacione, por edhe për ekuacione të tjera sidomos të fizikës matematike, siç e pamë dhe më sipër kërkon njohje të aparatit të transformimeve kanonike sepse si kriter oshilimi po përdorim vetëm një në morinë e madhe të kritereve, vetëm kriterin e rrjedhur nga teorema e tretë e krahasimit të Shturmit. Në seksionin që pason, paraqesim një skemë të kësaj metode.

5- Rezultatet e metodës

Metoda, fillon të veprojë mbi ekuacionin (2) (madje edhe (1) në rastin më të thjeshtë). Hapi i parë është kalimi në formën kanonike (5) të tyre. Në hapin e dytë, duhet bërë një përpjekje për të transformuar formën kanonike në një oshilator harmonik shuarës (amortizues) me koeficientë konstantë në formën (1). Atëherë kriteri për zgjidhjet oshiluese mund të përcaktohet, siç dihet, fare lehtë, nga dallori i ekuacionit karakteristik të fuqisë së dytë. Disa ekuacione të mirënjohur, Cauchy-Euler apo Chebyshev mund të transformohen në ekuacione me koeficientë konstantë në këtë hap të programit. Në rast se hapi i mësipërm nuk është i zbatueshëm, një lloj transformimi i ndryshëm me të mund të zbatohet ende për variablin e pavarur.

Në këtë hap, forma kanonike (5) duhet të transformohet në një formë në të cilën koeficienti i derivatit të parë të jetë konstant. Kjo konstante përfaqëson amortizimin apo shuarjen e "pastër" që është e aftë të kundërshtojë çdo tendencë oshiluese natyrore që mund të kenë zgjidhjet. Së fundmi, kur kjo formë shndërrohet në formën e saj kanonike, amortizimi konstant ndodhet domosdoshmërisht në koeficientin e kësaj forme përfundimtare, ku sigurisht që do të kundërshtojë lëkundjen në përpjekje për të shuar oshilacionet dhe për të kaluar në një situatë të qëndrueshme (zgjidhje të qëndrueshme, eventualisht pozitive apo eventualisht negative). Së fundmi, aplikojmë teoremën e tretë të krahasimit të Shturm-it duke marrë një kriter (ekuacionet (18) dhe (19)) që mund të zbulojnë intervalet e sjelljes oshiluese në këtë hap të programit (figura 1).

$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$	*Ekuacioni me koeficient variabël* (2)

Po ↓

$z'' + q(x)z = 0.$	*Ekuacioni i parë kanonik* (5)

Po ↓

$y'' + By' + Cy = 0$	*Ekuacioni me koeficientë konstant* (1)
nëse nuk ka mundësi	
$z'' - cz' + c^2(x - c_1)^2 q(x)z = 0$	*Ekuacioni* (12)

Po ↓

↓

$$\boxed{w''(x) + c^2\left[(x-c_1)^2 q(x) - \frac{1}{4}\right] w = 0. \qquad \textit{Ekuacioni i dytë kanonik} \quad (16)}$$

Po

$$\boxed{y'' + \varepsilon^2 y = 0. \qquad \textit{Teorema e tretë e krahasimit të Shturm} - \textit{it} \quad (17)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\textit{Përfundim:} \quad \textit{Intervali i Oshilacionit}}$$

Figura. 1. Skema e metodës për gjetjen e intervaleve të oshilimit

Përfundime

Problemet bazë të Teorisë së Shturm-Liuvilit janë dy: (I) Të studiojë konceptin e ekzistencës së vlerave vetjake (eigenvalues) dhe të funksioneve vetjakë korrespondues (eigenfunctiones), t'i përshkruajë ato nga ana cilësore dhe në një farë mase, nga ana sasiore. (II) Të provojë që një funksion "arbitrar" mund të shprehet si një seri e pafundme e funksioneve vetjakë. Instrumenti kryesor që përdoret në zgjidhjen e problemit të parë është *Teoria e Oshilacionit*, Kjo teori zhvillohet mbi një kuadër të përgjithshëm i cili nuk kërkon domozdoshmërisht zgjidhjen eksplicite të ekuacioneve, kur ne nuk mundemi të japim një zgjidhje përfundimtare për to.

Në këtë punim, ne kemi paraqitur një metodologji për parashikimin e intervaleve të oshilacioneve në zgjidhjet e ekuacioneve diferenciale homogjene lineare të rendit të dytë, duke u mbështetur në sjelljen e koeficientëve variabël të tyre. Por në këto intervale, sjellja oshilatore e zgjidhjeve nuk është sjellja klasike e teorisë së oshilacionit, pra ajo e ekzistencës së zgjidhjeve me një numër të pafundëm zerosh. Vetia e oshilimit në këtë rast përfshin një spektër më të gjerë situatash, pra edhe situatën që lidhet me paraqitjen e pikave kritike të njëpasnjëshme të të njëjtit lloj (maksimum, minimum ose pika infleksioni) në grafikun e një zgjidhjeje, që tashmë e marrim si zgjidhje "oshilatore".

Sugjerime

Ekuacioneve apo funksioneve speciale të rrjedhura nga fizika matematike dhe jo vetëm mund tu studiohen me këtë metodë intervalet ku ato shfaqin veti oshilatore të zgjidhjeve të tyre. Konkretisht ekuacionet e tipit të Besselit, Laguerre, Hermit, Chebyshev, Rikati etj.

Literatura

Agarwal R. P., Grace S. R., Oregon D. (2000): Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations. Kluwer Academic Publishers

Agarwal R. P., Grace S. R., Oregon D. (2002): Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear, Dynamic Equations. Kluwer Academic, Dordrecht

Agarwal R. P, Berezansky L, Braverman E and Domoshnitsky A. (2012): Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications, Springer, New York, NY, USA

Beqiri. Xh., Koçi. E. (2011): Interval oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with damping term. International Journal of Science, Innovation and New Technology, (IJSINT). Nr.2, Vol.3:85-91

Beqiri. Xh., Koçi. E. (2014): New oscillation and nonoscillation criteria for second order nonlinear differential equations. International Journal of Pure and Applied Mathematics. Nr. 2, Vol 93 : 155-163

Beqiri. Xh., Koçi. E. (2013): Oscillation theorems for second order Differential Equations and their Applications. Journal of Mathematics and System Science .Vol 3: 83-88

Christodoulou D.M., Eagle J.G., Katatbeh Q. D. (2016): A program for predicting the intervals of oscillations in the solutions of ordinary second-order linear homogeneous differential equations. Advances in Difference Equations. 48 [DOI 10.1186/s13662-016-0774-x]

Koçi. E. (2009): Improvement of some sufficient conditions of oscillation of solutions to functional equations of second order, Bulletin of Natural Sciences. Nr. 7: 58-68

Koçi.E. (2010): Oscillation of solutions to second order nonlinear neutral delay differential equations. Albanian Journal of Natural and Technical Sciences (A.J.N.T.S), Vol XVI, Nr.2:115-128

Temme N.M. (1996): Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. Wiley, New York