

# OPTIMIZIMI I PROCESIT PËR NDËRTIMIN E KALIGRAFISË NËPËRMJET HAPËSIRËS SË B- SPLAJNEVE

EGLANTINA KALLUÇI, EVA NOKA, KLODIANA BANI

Departamenti i Matematikës së Aplikuar, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Universiteti i  
Tiranës

e-mail: [eglantina.kalluci@fshn.edu.al](mailto:eglantina.kalluci@fshn.edu.al)

## Përmbledhje

Në këtë punim janë përdorur gjetjet teorike të metodave interpoluese, të cilat janë kombinuar sipas efikasitetit përkatës për t'u implementuar në disa problema praktike. Qëllimi i punimit është optimizimi i fuqisë së polinomeve që mund të përdoren në modelimin e skicave të ndryshme. Interpolimi është një nga teknikat numerike më themelore dhe më të përdorshme. Në këtë punim jemi fokusuar tek sistemet e funksioneve splajne nga i cili mund të formohen të gjithë funksionet e tjera splajne me anë të kombinimeve lineare. Këto splajne përbëjnë bazën për një hapësirë të caktuar splajnesh dhe quhen B-splajne, të cilat përdoren për dizejnimin shumë të saktë të formave standarde dhe analitike si dhe të skicimit të kurbave e sipërfaqeve. B-splajnet gjenerohen lehtë me anë të relacioneve rekurrente. Më pas janë implementuar në modelimin e karaktereve të animacioneve për qëllime të modelimit të skicave të animuar dhe kaligrafi të shkronjave me fonte të ndryshme.

**Fjalë kyçe:** Interpolim, polinome interpoluese, splajnet, modeli B-splajn, nyjet interpoluese, shumëkëndëshi i kontrollit, nyje e shumëfishtë.

## Abstract

In this paper are used the theoretical findings of interpolation methods, which are combined regarding to the respective efficiency and then implemented in some practical problems. The aim of this work is the optimization of the order of the polynomial used in modelling various sketches. The interpolation is one of the fundamental numerical techniques ever used. In this paper we are focused in the systems of spline functions and from the linear combinations of them. These splines are the base for a certain spline space that is known as B-spline which are used for a very accurate design of standard and analytical curves and surfaces. B-splines are generated easily through recurrent relations. These functions are implemented in modelling the animated sketches and the calligraphy with various fonts.

**Key words:** Interpolation, Interpolation Polynomials, splines, B-spline model, knot vector, control polygon, multiple knot.

## Hyrje

Në këtë punim janë trajtuar polinomet interpoluese, B-splajnet dhe disa zbatime praktike të B-splajneve. Polinomet interpoluese janë të përshtatshme vetëm në studimet teorike, ndërsa kur duhet implementuar, trajta e tyre është e rënduar, për shkak të veprimeve të shumta që duhen kryer si dhe dukurisë Runge, e cila shfaqet në rastin kur numri i nyjeve rritet mjaft dhe rrjedhimisht shkalla e polinomit interpolues është e lartë. Për të mbetur tek interpolimi dhe për të shmangur polinomet interpoluese të rendeve të larta përdoren pjesë-pjesë polinomet. Në këtë punim do të përqëndrohemi tek B-splajnet të cilat gjenerohen lehtë me anë të relacioneve rekurente.

Përdorimi i B-splajnëve në njohjen e modeleve gjeometrike përbën një nga mjetet kryesore të modelimit gjeometrik ose për të vizatuar trajektoren e lëvizjes së një pike (objekti). Në animacionet kompjuterike përdoren kurba për të përcaktuar trajektoret në hapësirat tre-përmasore dhe dy-përmasore. B-splajnet përdoren për modelimin e filmave të animuar dhe shkronjave të formave të ndryshme. Ky paragraf i kushtohet sistemit të funksioneve splajne nga i cili mund të formohen të gjithë funksionet e tjera splajne me anë të kombinimeve lineare [de Boor 1972, Rogers 2001]. Këto splajne përbëjnë bazën për një hapësirë të caktuar splajnesh që quhen **B –splajne**. B –splajnet gjenerohen lehtë me anë të relacioneve rekurente nga një sistem nyjesh,  $x_i$  në boshtin real. Për qëllime praktike, vetëm një bashkësi e kufizuar nyjesh është e nevojshme, por në trajtimet teorike është më e lehtë të supozojmë që nyjet formojnë një bashkësi të pakufizuar që shtrihet në gjithë boshtin real. Jepet vargu i nyjeve  $x_i, x_0 < x_1, \dots, < x_n$ .

$$B_{i,k} = w_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - w_{i+1,k}) B_{i+1,k-1}, \quad w_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+k-1} - x_i}, & \text{nëse, } x_{i+k-1} \neq x_i \\ 0, & \text{ndryshe} \end{cases}$$

dhe  $w_{i,k}(x)$  - quhet **funksioni peshë**.

Në mënyrë analoge fitohet B-splajni i shkallës  $n$ , i cili është kombinim i polinomeve të shkallës  $\leq n$ .

$$B_{i,n}(x) = \sum_{j=1}^{i+n-1} P_{i,j}(x) X_j(x)$$

B-splajni  $B_{i,n}$  është plotësisht i përcaktuar më ndihmën e  $(n+1)$  nyjeve interpoluese  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}$  dhe shkurtimisht mund të shënohet:

$$B(x | x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) = B_{i,n}.$$

**Përkufizimi 1:** B-splajni i rendit  $(n+1)$  për nyjet interpoluese të dhëna  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}$  përcaktohet si më poshtë:

$$B_{i,n+1}(x) = (x_{i+n+1} - x_i) \left[ x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; (t-x)_+^n \right]$$

ku:

$$(t-x)_+^n = \begin{cases} (t-x)^2 & nqs \ t \geq x \\ 0 & nqs \ t < x \end{cases}$$

**Përkufizimi 2:** Le të jetë dhënë splajni  $S(x) = \sum_i \alpha_i B_{i,n}$ , ku B-splajnet  $B_{i,n}$  janë të përcaktuar në vargun e nyjeve  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$  dhe shumëkëndëshi  $P_0, P_1, \dots, P_n$  i cili ka kulmet në pikat  $P_i(x_i^*, \alpha_i)$  ku

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_{i+n-1}}{n-1}$$

quhet shumëkëndësh kontrolli, ndërsa pikat  $P_i$  quhen pika kontrolli. Shumëkëndëshin e kontrollit e shënojmë  $C_{\alpha,x}$  dhe vlen teorema e mëposhtme.

**Teorema 1:** Le të jetë  $C_{\alpha,x}$  shumëkëndëshi i kontrollit, i cili shoqëron splajnin

$S(x) = \sum_i \alpha_i B_{i,n}$  nga bashkësia e splajneve  $S_{n,x}$ , atëherë është i vërtetë mosbarazimi:

$$|S(x) - C_{\alpha,x}| \leq k \sup_i (x_{i+1} - x_i) \sup_t (D^2 S(t))$$

Kjo teoremë tregon se shumëkëndëshi i kontrollit konvergjon te splajni sipas faktorit  $\sup_i (x_{i+1} - x_i)$ , domethënë sa më të dendura të jenë nyjet aq më shpejt ai konvergjon te shumëkëndëshi i kontrollit.

## ZBATIME TË B -SPLAJNEVE

Një kurbë splajne është një bashkim i disa kurbave që janë të lidhura së bashku për të formuar një kurbë të vetme të vazhdueshme. B-splajnet përdoren për modelimin e karaktereve të animacioneve për qëllime të modelimit të filmave të animuar dhe shkronjave me kaligrafi të ndryshme. Modelet e B-splajne u

përmendën për herë të parë nga Schoenberg [Ma et. al 2004]. Fillimisht, zbatimi praktik i kurbave dhe sipërfaqeve të B-splajneve ishte i kufizuar nga paqëndrueshmëria e algoritmeve për llogaritjen e tyre. Kjo pengesë u zgjidh nga Cox dhe de Boor [de Boor 1972] të cilët propozuan një algoritëm efikas për llogaritjen numerike bazuar në modelin rekursiv. B-splajnet rezultojnë të jenë një prej mekanizmave më të fuqishëm për të ndërtuar forma shumë të konplikuara. Metodrat që përdoren për rritjen e fleksibilitetit të kurbave B-splajne bazohen në dy teknika [Rogers 2001, Ma et. al, 2004]: (i) rritja e rendit të splajnit, (ii) futja e nyjeve ose siç njihet ndryshe nënndarja.

Nëse  $[S_k = [B_0^k(t) B_1^k(t) \dots B_n^k(t)]^T$  është bazë B-splajne e përcaktuar në formë vektoriale, atëherë,

$$S_k(P; t) = S_k^T P = \sum_{i=0}^n B_i^k(t) P_i, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

është kurba B-splajne e përcaktuar me anë të pikave të kontrollit  $P = [P_0 \dots P_n]^T$ .

Është e qartë se zgjedhja e funksioneve bazë dhe zgjedhja e pikave të kontrollit ndikojnë ndjeshëm në formën e kurbës B-splajne. Avantazhi i rritjes së rendit është se kurba B-splajne ruan lëmueshmërinë, dhe ndërkohë që zbatojmë teknikën e nënndarjes, zvogëlohet diferencueshmëria në nyjet ekzistuese, e cila drejtpërdrejtë varet nga shumëfishiteti i pikave të kontrollit. Nëse pikat e kontrollit janë me shumëfishitet një, zbatimi i nënndarjes zvogëlon diferencueshmërinë deri në rendin  $(k - 2)$ . Duke rritur shkallën e kurbës B-splajne, lakorja e re duhet të jetë identike me lakoren origjinale, dmth

$$S_k(P; t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^k(t) P_i = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^{k+1}(t) P_i^*$$

ku  $P_i^*$  janë pikat e kontrollit për lakoren e re.

Kurba B-splajne e një rendi më të lartë bëhet më e butë krahasuar me shumëkëndëshin e kontrollit. Gjithashtu, prezenca e elementëve të shumëfishtë në pikat e kontrollit për funksionet e bazës B-splajne, përkthehet në ndërtimi i lakores B-splajne më afër shumëkëndëshit të kontrollit. Fleksibiliteti i kurbës B-splajne gjithashtu rritet në qoftë se fusim elemente shtesë në pikat e kontrollit.

Ekzistojnë dy metoda themelore të futjes së tyre. Metoda e parë përdor të ashtu quajturin algoritëm Oslo të zhvilluar nga Cohen [de Boor 1972, Rogers 2001, Ma

et. al, 2004] dhe algoritmin Prautzch, i cili konsiston në futjen njëkohësisht të pikave të shumëfishta.

Metoda e dytë, e zhvilluar nga Boehm konsiston në futjen në mënyrë të përsëritur të një pike të vetme në vektorin e pikave të kontrollit. Le të jetë një kurbë fillestare e shoqëruar nga vektori, e tillë që:

$$S_k(P; t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^k(t) P_i, \quad \tau \in [t_1, t_2, \dots, t_{n+k+1}]$$

Kurba e re, e cila merret pas futjes së një pike të re kontrolli përcaktohet nga

$$R_k(P; s) = \sum_{j=1}^{m+1} M_j^k(s) C_j, \quad \tau^* \in [y_1, y_2, \dots, y_{m+k+1}]$$

$m > n$ , është vektori i ri i pikave të kontrollit dhe  $S_k(P; t) = R_k(P; s)$ .

Për të përcaktuar pikat e reja të shumëkëndëshit të kontrollit përdoret algoritmi Oslo.

$$C_j = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i,j}^k P_i \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

ku  $\alpha_{i,j}^k$  jepen me relacionin rekursiv të mëposhtëm

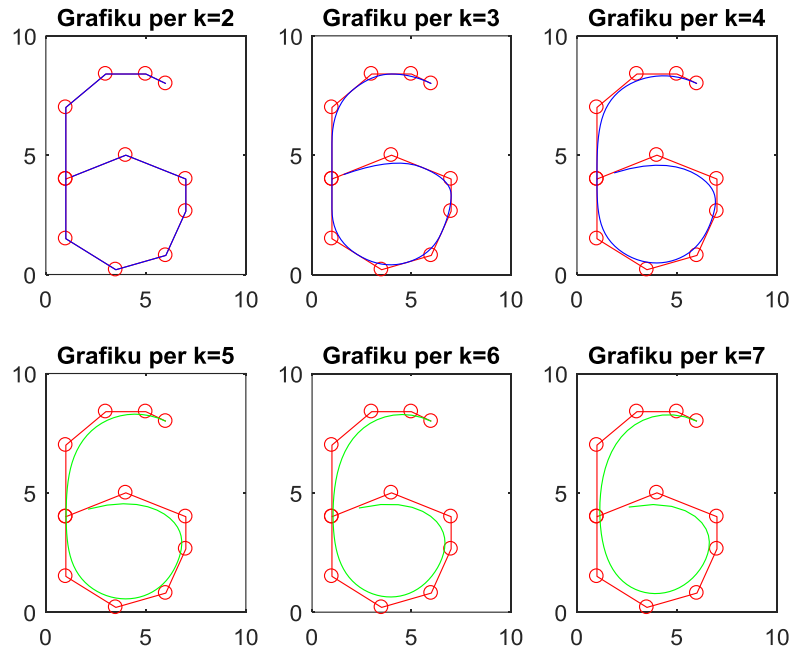
$$\alpha_{i,j}^k = \begin{cases} 1 & t_i \leq y_j \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{ndryshe} \end{cases},$$

$$\alpha_{i,j}^k = \frac{y_{j+k-1} - t_i}{t_{j+k-1} - t_i} \alpha_{i,j}^{k-1} + \frac{t_{j+k} - y_{i+k-1}}{t_{j+k} - t_i} \alpha_{i+1,j}^{k-1}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i,j}^k = 1.$$

B-splajnet përdoren shumë në krijimin e grafikave kompjuterike. Në vijim po paraqesim zbatimin e B-spajneve në modelimin e kaligrafisë së shkronjave të dorës. Zbatimi i parë, i referohet modelimit të numrit 6 (gjashtë). Në këtë rast kemi punuar vetëm me një shumëkëndësh kontrolli, por kemi përdorur polinome të rendeve nga dy deri në shtatë.

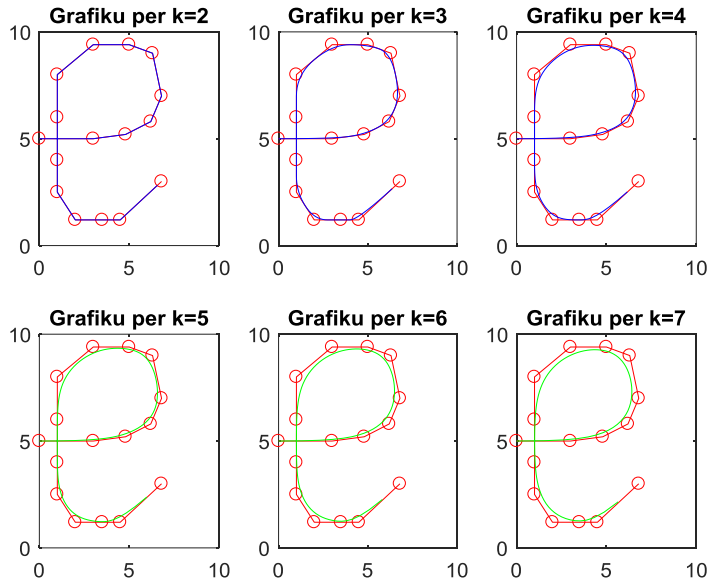
Duhet të kemi parasysh që rindërtimi i kaligrafisë varet nga nyjet që merren në kaligrafinë që duhet riprodhuar dhe kjo metodë ndërdhur avantazhet e kurbave B-spajne të kombinuara me kurbat Bézier.

Në grafikun e parë është paraqitur shumëkëndëshi i kontrollit, dhe në rastet e kur kemi ndërtuar kurbat B-splajne të rendit të tretë dhe të katërt, spajni i përfutur është tangent me shumëkëndëshin e kontrollit, e ndërsa rendi i polinomeve rritet vëmë re që rritet lëmueshmëria e kurbës, por largohemi nga shumëkëndëshi i kontrollit. Theksojmë që kemi përdorur splajn të shtrënguar, gjë e cila na mban të fiksuar në nyjet ekstremale të kurbës që kërkojmë të përafrojmë.

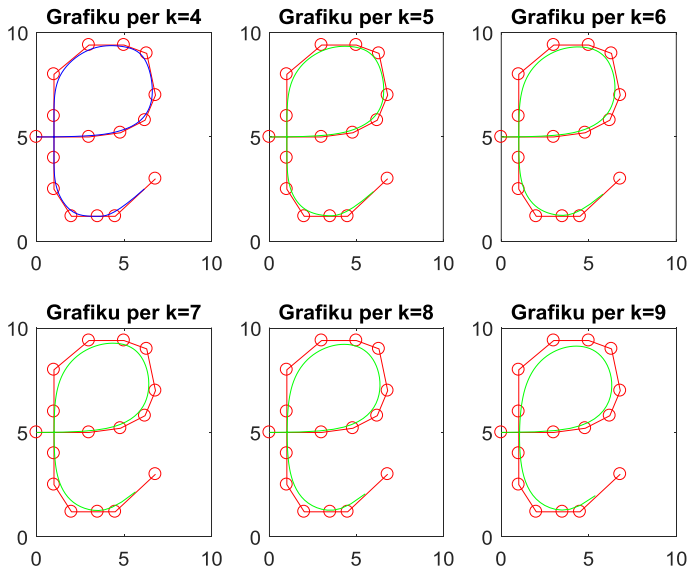


**Figura 1.1.** Zbatimi i B-splajnit për modelimin e numrit 6 (gjashtë).

Në Figurën 1.2 do të përdorim sërisht një shumëkëndësh kontrolli për të modeluar shkronjën 'e' të dorës, por në ndryshim nga modelimi i numrit 6 (gjashtë) këtu do të marrim më shumë nyje interpoluese. Kurba B-splajne e përfutur nga rendi i tretë deri tek e rendit të pestë nuk shkëputet nga shumëkëndëshi i kontrollit, pra është tangent me të. Po ti referohemi Figurës 1.3 në të cilën paraqiten kurbat B-splajne nga rendi i katërt deri në rendin e nëntë, vënë re shkëputja nga shumëkëndëshi i kontrollit arrihet për funksionet splajn të rendit të nëntë.

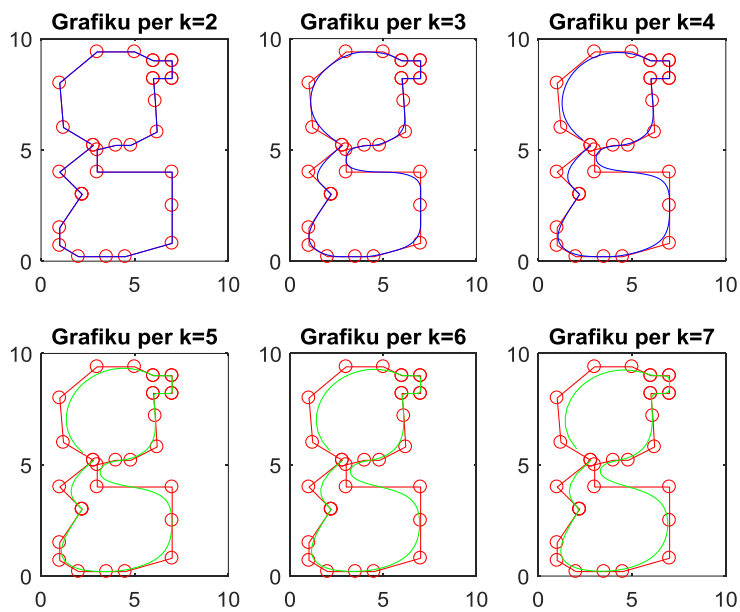


**Figura 1.2** Zbatimi i B-splajnit për modelimin e shkronjës 'e', duke përdorur polinomet nga rendi i tretë deri në rendin e shtatë.



**Figura 1.3** Zbatimi i B-splajnit për modelimin e shkronjës 'e', duke përdorur polinomet nga rendi i katërt deri në rendin e nëntë.

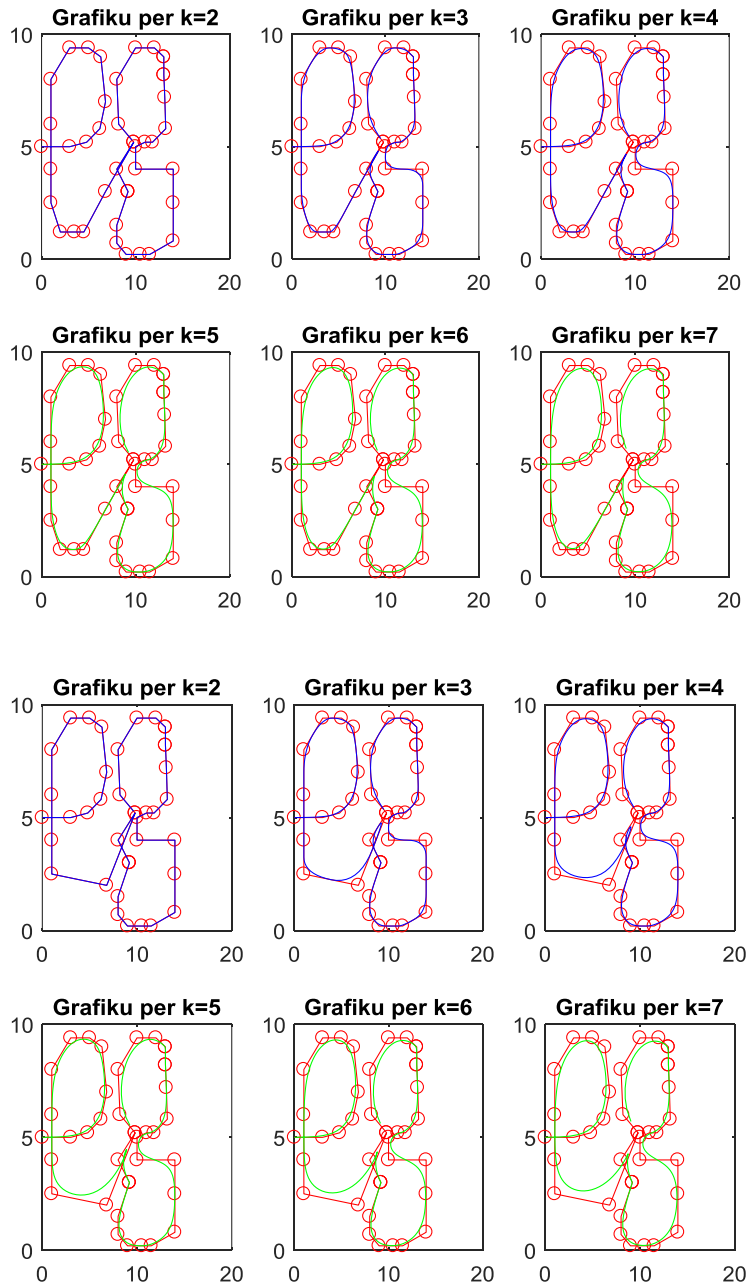
B-Splajnet në ndryshim nga kurbat Bezier rindërtojnë një lakore të caktuar nisur nga nyjet interpoluese me më shumë saktësi [Chen *et. al.*, 1995, Vinh *et. al.*, 2012, Prabhu *et. al.*, 2019], dhe kjo vjen nga fakti që siç është paraqitur në Përkufizimin 2, B-splajnet kërkojnë më shumë informacion dhe konkretisht, nevojitet ndërtimi i shumëkëndëshit të kontrollit. Në figurën e mëposhtme është ndërtuar shkronja 'g' me një kaligrafi pak të veçantë dhe për të janë marrë në shqyrtim dy shumëkëndësha kontrolli. Vihet re se jemi në një situatë të ngjashme me shkronjën 'e', pra prezenca e shumë pikave nyjeve dhe për t'u shkëputur nga shumëkëndëshi i kontrollit nevojiten B-splajne të rendit më të lartë se nëntë.



**Figura 1.4** Zbatimi i B-splajnit për modelimin e shkronjës 'g'.

Qëllimi i këtij punimi është riprodhimi i kaligrafisë së dorës dhe në Figurën 1.5 janë paraqitur shkronjat 'eg', ku janë përdorur 3 shumëkëndësha kontrolli, përkatësisht i pari për modelimin e shkronjës 'e', dhe dy të dytët për modelimin e shkronjës 'g'. Në Figurën 1.5 janë përdorur dy kaligrafie të ndryshme dhe kjo për të dhënë idenë e larmisë së kaligrafive që mund të skicohen.





**Figura 1.5** Zbatimi i B-splajnit për modelimin e shkronjave *eg* duke përdorur B-splajnet deri në rendin e shtatë.

Fleksibiliteti i ofruar nga përdorimi i B-splajneve është një teknikë potenciale për të modeluar kurba me forma gjithnjë e më të komplikuar dhe pa vendosur kufizime mbi numrin e pikave të infleksionit, pasi edhe për të njëjtën figurë mund të përdoren shumëkëndësha të ndryshëm kontrolli. Disavantazhi i kësaj teknike është trajtimi rast pas rasti i secilit model, pasi ndryshimi i pikave nje dikton një bashkësi pikash kontrolli të ndryshme dhe kjo e bën të vështirë ndërtimin e një pakete apo M-file që mund të procesojë çdo rast, me të dhëna hyrëse variabël [Jayasundara *et. al.*, 2019, Frings *et. al.*, 2020].

### **Përfundime**

Interpolimi është një nga teknikat numerike më themelore e më të përdorshme. Me anë të tij përftohen metoda të fuqishme dhe efikase për zgjedhjen e problemeve të teorisë së përafërimeve të funksioneve, të diferencimit dhe integritit numerik. Në këtë punim jemi fokusuar në implementimin e B-splajneve për riprodhimin e shkrimit të dorës.

B-splajnet përdoren mjaft gjerësisht në modelimet tre-përmasore. Ata kanë një përparsi ndaj kurbave Bezier, pasi janë më të buta dhe më të lehta për të manipuluar me to falë pikave të kontrollit.

Mbetet modelimi dhe njohja e firmave dhe ajo që është më e kërkuara njohja e firmave, si dhe pse jo edhe ajo e njohjes së shenjave të gishtërinjve [Ma et al 2004, Oden et al 2003], të cilat aktualisht kryhen me anë të përpunimit të imazhit dhe analizës së valëzave.

### **Literatura**

Carl de Boor, (1972): On calculating with B-splines, Journal of Approximation Theory 6, 50-62

Rogers D. F. (2001): An Introduction to NURBS: With historical perspective, Academic Press

YingLiang Ma, Frank Pollick, W. Terry Hewitt, (2004): Using B-spline curves for hand recognition, IEEE, ICPR, ISSN: 1051-4651.

C. Oden, A. Ercil, and B. Buke, (2003): Combining implicit polynomials and geometric features for hand recognition, Pattern Recognition Letters, 24

G. Chen and Y. H. H. Yang, (1995): Edge detection by Regularized Cubic B-Spline Fitting, IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, 25(4)

P.C. Vinh et al. (Eds.), Handwriting recognition using B-spline curve, ICCASA 2012, LNICST 109, pp. 335–346, 2013

Vinay Uday Prabhu, Sanghyun Han, Dian Ang Yap, Mihail Douhaniaris, Preethi Seshadri, and John Whaley. (2019): Fonts-2-handwriting: A seed-augment-train framework for universal digit classification. arXiv preprint arXiv:1905.08633

Vinoj Jayasundara, Sandaru Jayasekara, Hirunima Jayasekara, Jathushan Rajasegaran, Suranga Seneviratne, and Ranga Rodrigo, (2019): Textcaps: Handwritten character recognition with very small datasets. In 2019 IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV), pp. 254–262. IEEE

Markus Frings, Norbert Hosters, Corinna Muler, Max Spahn, Christoph Susen, Konstantin Keya, Stefanie Elgeti, SplineLib: A Modern Multi-Purpose C++ Spline Library, Advances in Engineering Software, 2020, CC-BY-NC-ND 4.0 license

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>